в ней $t=x+1$, $b=5$:

$$\int \sqrt{x^2+2x+6}\,dx=\int \sqrt{(x+1)^2+5}\,d(x+1)=$$
$$=\frac{x+1}{2}\sqrt{(x+1)^2+5}+\frac{5}{2}\ln\left[x+1+\sqrt{(x+1)^2+5}\right]+C.$$

3) Выделяя полный квадрат в подкоренном выражении $3+4x-x^2=-(x^2-4x-3)=-[(x-2)^2-7]=7-(x-2)^2$ и применяя формулу (Б), при $t=x-2$, $a^2=7$, получим

$$\int \sqrt{3+4x-x^2}\,dx=\int \sqrt{7-(x-2)^2}\,d(x-2)=$$
$$=\frac{x-2}{2}\sqrt{7-(x-2)^2}+\frac{7}{2}\arcsin\frac{x-2}{\sqrt{7}}+C.$$

Найти интегралы:

491. $\int \frac{dx}{x^2-x-6}$.

492. $\int \frac{dx}{x^2+4x+29}$.

493. $\int \frac{dx}{4x-1-4x^2}$.

494. $\int \frac{(4x-3)\,dx}{x^2+3x+4}$.

495. $\int \frac{(3x+4)\,dx}{x^2+5x}$.

496. $\int \frac{18x^2+13x}{1+6x+9x^2}\,dx$.

497. $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^2+2x-3}\,dx$.

498. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$.

499. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}$.

500. $\int \frac{(x+3)\,dx}{\sqrt{1-4x^2}}$.

501. $\int \frac{(x-3)\,dx}{\sqrt{x^2+6x}}$.

502*. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-2x-3x^2}}$.

503. $\int \sqrt{x^2+4x}\,dx$.

504. $\int \sqrt{1-2x-x^2}\,dx$.

§ 6. Интегрирование тригонометрических функций

Часто встречающиеся интегралы от выражений, содержащих тригонометрические функции следующих видов:

$$\text{I. } \int \sin^n x\,dx, \quad \int \cos^n x\,dx, \qquad \text{II. } \int \sin^m x\cos^n x\,dx,$$
$$\text{III. } \int \operatorname{tg}^n x\,dx, \qquad \int \operatorname{ctg}^n x\,dx,$$

где m и n — целые положительные числа.

$$\text{IV. } \int \sin ax\cos bx\,dx, \quad \int \sin ax\sin bx\,dx, \quad \int \cos ax\cos bx\,dx$$

можно свести к формулам интегрирования, а следовательно, и найти, руководствуясь следующими правилами:

1. Интегралы от четной степени синуса или косинуса можно найти путем понижения степени (вдвое) по формулам:

$$\sin^2 u=\frac{1}{2}(1-\cos 2u);\quad \cos^2 u=\frac{1}{2}(1+\cos 2u);\quad \sin u\cos u=\frac{1}{2}\sin 2u.$$

2. Интегралы от нечетной степени синуса или косинуса можно найти путем отделения от нее одного множителя и замены кофункции новой переменной.

3. Интегралы вида II можно найти по правилу 1, если m и n оба четные, или по правилу 2, если m или n (или и m и n) нечетно.

4. Интегралы вида III можно найти путем замены $\operatorname{tg} x$, или соответственно, $\operatorname{ctg} x$ новой переменной.

5. Интегралы вида IV можно найти путем разложения на слагаемые по формулам:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x],$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x],$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x].$$

505. Найти интегралы:

1) $\int \sin^2 3x\,dx$; 2) $\int \cos^4 x\,dx$; 3) $\int \sin^5 x\,dx$;

4) $\int \sin^4 x \cos^2 x\,dx$; 5) $\int \sin^6 kx \cos^3 kx\,dx$; 6) $\int \sin^3 x \cos^5 x\,dx$.

Решение. 1) Согласно правилу 1 имеем

$$\int \sin^2 3x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 6x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{12}\int \cos 6x\,d(6x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{12}\sin 6x + C.$$

2) Применяя правило 1, получим

$$\int \cos^4 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2\,dx = \frac{1}{4}\int (1+\cos 2x)^2\,dx = \frac{1}{4}\left[\int dx + \int \cos 2x\,d(2x) + \int \cos^2 2x\,dx\right].$$

Первые два интеграла представляют формулы, последний интеграл находим отдельно, по правилу 1:

$$\int \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x\,d(4x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin 4x.$$

Подставляя в предыдущее равенство, получим

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{4}\left(x + \sin 2x + \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + C = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

3) По правилу 2 отделяем от нечетной степени один множитель $\sin^5 x = \sin^4 x \sin x$ и заменяем кофункцию новой переменной, т. е. полагаем $\cos x = z$. Тогда получим $-\sin x\,dx = dz$.

$$\int \sin^5 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x\,dx = \int (1-z^2)^2(-dz) =$$
$$= -\int (1-2z^2+z^4)\,dz = -z + \frac{2z^3}{3} - \frac{z^5}{5} + C =$$
$$= C - \cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x.$$

4) Применяя правило 3 (1), получим

$$I = \int \sin^4 x \cos^2 x\,dx = \int \sin^2 x (\sin x \cos x)^2\,dx =$$
$$= \int \frac{1-\cos 2x}{2} \cdot \frac{\sin^2 2x}{4}\,dx = \frac{1}{8}\left(\int \sin^2 2x\,dx - \int \sin^2 2x \cos 2x\,dx\right).$$

Первый интеграл находим по правилу 1:

$$\int \sin^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x\,d(4x) =$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x.$$

Второй интеграл находим по правилу 3 (2), полагая $\sin 2x = z$. Тогда $2\cos 2x\,dx = dz$,

$$\int \sin^2 2x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int z^2\,dz = \frac{z^3}{6} = \frac{1}{6}\sin^3 2x.$$

Подставляя эти результаты, имеем

$$I = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{6}\sin^3 2x\right) + C.$$

5) Согласно правилу 3(2) отделяем от нечетной степени один множитель $\cos^3 kx = \cos^2 kx \cos kx$ и заменяем кофункцию новой переменной, т. е. полагаем $\sin kx = z$. Тогда имеем $k\cos kx\,dx = dz$,

$$\int \sin^6 kx \cos^3 kx\,dx = \int \sin^6 kx (1-\sin^2 kx)\cos kx\,dx =$$
$$= \frac{1}{k}\int z^6(1-z^2)\,dz = \frac{1}{k}\left(\int z^6\,dz - \int z^8\,dz\right) = \frac{1}{k}\left(\frac{z^7}{7} - \frac{z^9}{9}\right) + C =$$
$$= \frac{1}{7k}\sin^7 kx - \frac{1}{9k}\sin^9 kx + C.$$

6) Применяем правило 3(2): отделяем от одной из нечетных степеней (низшей) один множитель $\sin^3 x = \sin^2 x \sin x$ и заменяем $\cos x$ через z; тогда найдем: $-\sin x\,dx = dz$ и

$$\int \sin^3 x \cos^5 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^5 x \sin x\,dx = -\int (1-z^2) z^5\,dz =$$
$$= -\int z^5\,dz + \int z^7\,dz = \frac{1}{8}z^8 - \frac{1}{6}z^6 + C = \frac{1}{8}\cos^8 x - \frac{1}{6}\cos^6 x + C.$$

506. Найти интегралы: 1) $\int \mathrm{tg}^4 x\,dx$; 2) $\int \sin 3x \cos 5x\,dx$.

Решение: 1) Применяя правило 4, полагаем $\operatorname{tg} x = z$, тогда $x = \operatorname{arctg} z$, $dx = \frac{dz}{1+z^2}$,

$$\int \operatorname{tg}^4 x\,dx = \int \frac{z^4}{z^2+1}\,dz = \int \left(z^2 - 1 + \frac{1}{z^2+1}\right) dz = \int z^2\,dz - \int dz + \\ + \int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{z^3}{3} - z + \operatorname{arctg} z + C = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C.$$

2) Применяем правило 5; разлагаем подынтегральную функцию на слагаемые, пользуясь тригонометрической формулой, затем интегрируем:

$$\int \sin 3x \cos 5x\,dx = \frac{1}{2}\int [\sin 8x + \sin(-2x)]\,dx = \frac{1}{16}\int \sin 8x\,d(8x) - \\ - \frac{1}{4}\int \sin 2x\,d(2x) = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + C.$$

Найти интегралы:

507. $\int \cos^2 5x\,dx$. **508.** $\int \cos^5 x\,dx$.

509. $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$. **510.** $\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx$.

511. $\int \sin^3 x \cos^3 x\,dx$. **512.** $\int \sin^4 x\,dx$.

513. $\int \operatorname{ctg}^4 y\,dy$. **514.** $\int \cos\frac{4}{3}x \cos 3x\,dx$.

515. $\int \sin 5x \sin 6x\,dx$. **516.** $\int \sin at \cos bt\,dt$.

517*. $\int \sin 3x \sin 4x \sin 5x\,dx$. **518*.** $\int (\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z)^3\,dz$.

§ 7. Интегрирование рациональных функций

Рациональные функции всегда интегрируются в элементарных функциях.

Целая рациональная функция (многочлен) интегрируется непосредственно:

$$\int (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n)\,dx = \frac{a_0}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_1}{n}x^n + \ldots + a_nx + C.$$

Интеграл от дробной рациональной функции $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, где $P(x)$ и $Q(x)$ многочлены, можно найти (выразить через элементарные функции) путем разложения на слагаемые, которые всегда преобразуются к формулам интегрирования.

Неправильную рациональную дробь, у которой степень числителя выше или равна степени знаменателя, можно делением числителя на знаменатель представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, у которой степень числителя ниже степени знаменателя.