Решение: 1) Применяя правило 4, полагаем $\operatorname{tg} x = z$, тогда $x = \operatorname{arctg} z$, $dx = \frac{dz}{1+z^2}$,

$$\int \operatorname{tg}^4 x\, dx = \int \frac{z^4}{z^2+1}\, dz = \int \left(z^2 - 1 + \frac{1}{z^2+1}\right) dz = \int z^2\, dz - \int dz + \\ + \int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{z^3}{3} - z + \operatorname{arctg} z + C = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C.$$

2) Применяем правило 5; разлагаем подынтегральную функцию на слагаемые, пользуясь тригонометрической формулой, затем интегрируем:

$$\int \sin 3x \cos 5x\, dx = \frac{1}{2} \int [\sin 8x + \sin(-2x)]\, dx = \frac{1}{16} \int \sin 8x\, d(8x) - \\ - \frac{1}{4} \int \sin 2x\, d(2x) = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C.$$

Найти интегралы:

507. $\int \cos^2 5x\, dx$. **508.** $\int \cos^5 x\, dx$.

509. $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$. **510.** $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$.

511. $\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx$. **512.** $\int \sin^4 x\, dx$.

513. $\int \operatorname{ctg}^4 y\, dy$. **514.** $\int \cos \frac{4}{3} x \cos 3x\, dx$.

515. $\int \sin 5x \sin 6x\, dx$. **516.** $\int \sin at \cos bt\, dt$.

517*. $\int \sin 3x \sin 4x \sin 5x\, dx$. **518*.** $\int (\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z)^3\, dz$.

§ 7. Интегрирование рациональных функций

Рациональные функции всегда интегрируются в элементарных функциях.

Целая рациональная функция (многочлен) интегрируется непосредственно:

$$\int (a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n)\, dx = \frac{a_0}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_1}{n} x^n + \ldots + a_n x + C.$$

Интеграл от дробной рациональной функции $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$, где $P(x)$ и $Q(x)$ многочлены, можно найти (выразить через элементарные функции) путем разложения на слагаемые, которые всегда преобразуются к формулам интегрирования.

Неправильную рациональную дробь, у которой степень числителя выше или равна степени знаменателя, можно делением числителя на знаменатель представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби, у которой степень числителя ниже степени знаменателя.

Правильную рациональную дробь можно разложить на элементарные, всегда интегрируемые слагаемые дроби следующих двух видов:

$$\frac{A}{(x-a)^m}, \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$

где m и n — целые положительные числа.

Для разложения правильной рациональной дроби $\frac{R(x)}{Q(x)}$ на элементарные слагаемые дроби нужно:

а) Разложить знаменатель $Q(x)$ на простейшие действительные множители.

В общем случае, согласно основной теореме алгебры, это разложение может содержать линейные и квадратные множители:

$$Q(x)=a_0(x-a)^m \dots (x-b)^k \cdot (x^2+px+q)^n \dots (x^2+cx+d)^r.$$

б) Написать схему разложения данной дроби на элементарные слагаемые дроби в следующем виде:

$$\frac{R(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\dots+\frac{A_m}{(x-a)^m}+\dots$$
$$\dots+\frac{B_1}{x-b}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\dots+\frac{B_k}{(x-b)^k}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+$$
$$+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\dots+\frac{M_nx+N_n}{(x^2+px+q)^n}+\dots+\frac{C_1x+D_1}{x^2+cx+d}+$$
$$+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+cx+d)^2}+\dots+\frac{C_rx+D_r}{(x^2+cx+d)^r},$$

где $A_1, \dots, B_1, \dots, M_1, \dots, N_1, \dots, C_1, \dots, D_1, \dots$ — некоторые постоянные. В эту схему для каждого множителя в разложении знаменателя $Q(x)$ вписывается столько элементарных слагаемых дробей, какова его кратность (m, k, n, $r, \dots$).

Знаменателями элементарных дробей являются все целые степени каждого множителя в разложении $Q(x)$, начиная с первой степени и кончая той степенью, которую множитель имеет в разложении $Q(x)$.

Числителями элементарных дробей служат либо постоянные $A_1, A_2, \dots$ либо линейные функции $M_1x+N_1, \dots$ смотря по тому, является ли знаменатель дроби некоторой степенью линейной или квадратной функции.

в) Освободиться от знаменателей, умножая обе части равенства на $Q(x)$.

г) Составить систему уравнений, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях полученного тождества. (Число этих уравнений должно быть равно числу неизвестных $A_1, \dots, B_1, \dots, M_1, \dots, N_1 \dots, C_1, \dots, D_1, \dots$).

д) Решить систему и подставить найденные значения $A_1, \dots, B_1, \dots, M_1, \dots, N_1, \dots$ в схему разложения.

После разложения на элементарные слагаемые дроби интегрирование всякой правильной рациональной дроби сводится к нахождению интегралов вида

$$I_1=\int\frac{dx}{(x-a)^m} \quad \text{и} \quad I_2=\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx.$$

Интеграл I_1 при $m\neq 1$ представляет формулу 1:

$$\int\frac{dx}{(x-a)^m}=\int(x-a)^{-m}\,d(x-a)=\frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1}+C,$$

а при $m=1$ представляет формулу 2:

$$\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|+C.$$

Интеграл I_2 при $n=1$ можно найти по правилу, указанному в § 5, а при $n=2, 3, 4, \ldots$ путем преобразований, показанных в решении следующей задачи.

519. Найти интегралы:

1) $\int\frac{3x^2+8}{x^3+4x^2+4x}\,dx$; 2) $\int\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}\,dx$;

3) $\int\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}\,dx$; 4) $\int\frac{(x^3-3)\,dx}{x^4+10x^2+25}$.

Решение. 1) Разложим подынтегральную правильную рациональную дробь на элементарные слагаемые дроби. Согласно указанному правилу:

а) разложим знаменатель иа простейшие действительные множители: $x^3+4x^2+4x=x(x^2+4x+4)=x(x+2)^2$;

б) напишем схему разложения подыитегральной дроби на элементарные слагаемые дроби

$$\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2};$$

в) освободимся от знаменателей, умножая обе части равенства на $x(x+2)^2$:

$$3x^2+8=A(x+2)^2+Bx(x+2)+Cx=$$
$$=(A+B)x^2+(4A+2B+C)x+4A;$$

г) составим систему уравнений, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях полученного тождества

$$A+B=3, \quad 4A+2B+C=0, \quad 4A=8;$$

д) решим эту систему: $A=2$, $B=1$, $C=-10$ и подставим найденные значения постоянных A, B, C в схему разложения

$$\frac{3x^2+8}{x(x+2)^2}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{10}{(x+2)^2}.$$

Подставляя под знак интеграла полученную сумму элементарных дробей и интегрируя каждое слагаемое отдельно, найдем

$$\int\frac{(3x^2+8)\,dx}{x^3+4x^2+4x}=\int\left[\frac{2}{x}+\frac{1}{x+2}-\frac{10}{(x+2)^2}\right]dx=$$
$$=2\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{x+2}-10\int(x+2)^{-2}\,d(x+2)=$$
$$=2\ln|x|+\ln|x+2|+\frac{10}{x+2}+C.$$

2) Выделим из подынтегральной неправильной дроби целую часть, деля числитель на знаменатель:

$$\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}=2x+\frac{1}{x^4+3x^2}.$$

Разложим полученную в результате правильную дробь на элементарные слагаемые дроби:

а) $x^4+3x^2=x^2(x^2+3)$;

б) $\dfrac{1}{x^2(x^2+3)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+3}$;

в) $1=Ax(x^2+3)+B(x^2+3)+(Cx+D)x^2=$
$=(A+C)x^3+(B+D)x^2+3Ax+3B$;

г) $A+C=0$; $B+D=0$; $3A=0$; $3B=1$;

д) $A=0$; $B=\dfrac{1}{3}$; $C=0$; $D=-\dfrac{1}{3}$;

$$\frac{1}{x^2(x^2+3)}=\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3(x^2+3)}.$$

Подставляя под интеграл и интегрируя, получим

$$\int\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}dx=\int\left(2x+\frac{1}{x^4+3x^2}\right)dx=$$
$$=\int\left[2x+\frac{1}{3x^2}-\frac{1}{3(x^2+3)}\right]dx=2\int x\,dx+\frac{1}{3}\int x^{-2}\,dx-$$
$$-\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2+3}=x^2-\frac{1}{3x}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$$

3) Разложим подынтегральную правильную дробь на элементарные слагаемые дроби:

а) $x^4+x=x(x^3+1)=x(x+1)(x^2-x+1)$;

б) $\dfrac{x^3+4x^2-2x+1}{x(x+1)(x^2-x+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2-x+1}$;

в) $x^3+4x^2-2x+1=A(x^3+1)+Bx(x^2-x+1)+$
$+(Cx+D)(x^2+x)=(A+B+C)x^3+(C+D-B)x^2+(B+D)x+A$;

г) $A+B+C=1$; $C+D-B=4$; $B+D=-2$; $A=1$;

д) $A=1$; $B=-2$; $C=2$; $D=0$;

$$\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}=\frac{1}{x}-\frac{2}{x+1}+\frac{2x}{x^2-x+1}.$$

Подставляя под интеграл и интегрируя, получим

$$I=\int\frac{x^3+4x^2-2x+1}{x^4+x}dx=\int\frac{dx}{x}-2\int\frac{dx}{x+1}+2\int\frac{x\,dx}{x^2-x+1}=$$
$$=\ln|x|-2\ln|x+1|+2I_1.$$

Последний интеграл I_1 находим отдельно, по правилу, указанному в § 5. Выделяем полный квадрат в знаменателе $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ и полагаем $x-\frac{1}{2}=t$. Тогда $dx=dt$,

$$I_1=\int\frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)dt}{t^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\int\frac{2t\,dt}{t^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+\frac{3}{4}\right)+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

Подставляя в предыдущее равенство, найдем

$$I=\ln\frac{|x|(x^2-x+1)}{(x+1)^2}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

4) Разложим подынтегральную дробь на элементарные слагаемые дроби:

а) $x^4+10x^2+25=(x^2+5)^2$;

б) $\frac{x^3-3}{(x^2+5)^2}=\frac{Ax+B}{x^2+5}+\frac{Cx+D}{(x^2+5)^2}$;

в) $x^3-3=(Ax+B)(x^2+5)+Cx+D=$
$=Ax^3+Bx^2+(5A+C)x+(5B+D)$;

г) $A=1;\quad B=0;\quad 5A+C=0;\quad 5B+D=-3$;

д) $A=1;\quad B=0;\quad C=-5;\quad D=-3$;

$$\frac{x^3-3}{(x^2+5)^2}=\frac{x}{x^2+5}-\frac{5x+3}{(x^2+5)^2}.$$

Интегрируя, имеем

$$I=\int\frac{x^3-3}{(x^2+5)^2}dx=\int\frac{x\,dx}{x^2+5}-5\int\frac{x\,dx}{(x^2+5)^2}-3\int\frac{dx}{(x^2+5)^2}.$$

Первый интеграл преобразуем к формуле 2:

$$\int\frac{x\,dx}{x^2+5}=\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+5}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+5)}{x^2+5}=\frac{1}{2}\ln(x^2+5).$$

Второй интеграл преобразуем к формуле 1:

$$\int\frac{x\,dx}{(x^2+5)^2}=\frac{1}{2}\int(x^2+5)^{-2}\,d(x^2+5)=\frac{1}{2}\,\frac{(x^2+5)^{-1}}{-1}=-\frac{1}{2(x^2+5)}.$$

В третьем интеграле заменяем переменную $x=\sqrt{5}\operatorname{tg} z$; тогда $dx=\sqrt{5}\sec^2 z\,dz$,

$$\int\frac{dx}{(x^2+5)^2}=\int\frac{\sqrt{5}\sec^2 z\,dz}{25\sec^4 z}=\frac{1}{5\sqrt{5}}\int\cos^2 z\,dz=$$

$$=\frac{1}{10\sqrt{5}}\int(1+\cos 2z)\,dz=\frac{1}{10\sqrt{5}}\left(z+\frac{1}{2}\sin 2z\right)=$$

$$=\frac{1}{10\sqrt{5}}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{x\sqrt{5}}{x^2+5}\right).$$

Окончательно имеем:

$$I=\frac{1}{2}\ln(x^2+5)+\frac{5}{2(x^2+5)}-\frac{3}{10\sqrt{5}}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{x\sqrt{5}}{x^2+5}\right)+C=$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+5)+\frac{25-3x}{10(x^2+5)}-\frac{3}{10\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$$

Найти интегралы:

520. $\int\frac{dx}{x^3-x^2}$.

521. $\int\frac{dx}{x^3+x}$.

522. $\int\frac{x\,dx}{x^3-1}$.

523. $\int\frac{(x^2+1)\,dx}{x^3-3x^2+3x-1}$.

524. $\int\frac{(7x-15)\,dx}{x^3-2x^2+5x}$.

525. $\int\frac{2t^5-2t+1}{1-t^4}dt$.

526. $\int\frac{z^2\,dz}{z^4+5z^2+4}$.

527. $\int\frac{x^4\,dx}{x^4-2x^2+1}$.

528*. $\int\frac{(x+1)\,dx}{x^4+4x^2+4}$.

529*. $\int\frac{1-x^4}{1+x^4}dx$.

§ 8. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Иррациональные (и трансцендентные) функции интегрируются в элементарных функциях только в некоторых определенных случаях. Наиболее употребительны следующие виды интегралов от иррациональных функций, которые выражаются через элементарные функции:

I. Интеграл $\int R(x, x^\alpha, x^\beta, \ldots)\,dx$, где R — рациональная функция, $\alpha=\frac{m_1}{n_1}$, $\beta=\frac{m_2}{n_2}$, ... — рациональные числа, сводится к интегралу от рациональной функции, и, следовательно, выражается в элементарных функциях с помощью подстановки $x=t^k$, где k — общий знаменатель всех дробных показателей у x.

Интегралы более общего вида $\int R[x, (ax+b)^\alpha, (ax+b)^\beta, \ldots]\,dx$ или $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^\alpha, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^\beta, \ldots\right]dx$ находятся (приводятся к рациональному виду) с помощью аналогичных подстановок: $ax+b=t^k$ или $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$.

II. К интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций, сводятся интегралы:

$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})\,dx$ — подстановкой $x=a\sin t$;

$\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})\,dx$ — подстановкой $x=a\operatorname{tg} t$;

$\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})\,dx$ — подстановкой $x=a\sec t$.