Окончательно имеем:

$$I=\frac{1}{2}\ln(x^2+5)+\frac{5}{2(x^2+5)}-\frac{3}{10\sqrt{5}}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{x\sqrt{5}}{x^2+5}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+5)+\frac{25-3x}{10(x^2+5)}-\frac{3}{10\sqrt{5}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$$

Найти интегралы:

520. $\int\frac{dx}{x^3-x^2}$.

521. $\int\frac{dx}{x^3+x}$.

522. $\int\frac{x\,dx}{x^3-1}$.

523. $\int\frac{(x^2+1)\,dx}{x^3-3x^2+3x-1}$.

524. $\int\frac{(7x-15)\,dx}{x^3-2x^2+5x}$.

525. $\int\frac{2t^5-2t+1}{1-t^4}\,dt$.

526. $\int\frac{z^2\,dz}{z^4+5z^2+4}$.

527. $\int\frac{x^4\,dx}{x^4-2x^2+1}$.

528*. $\int\frac{(x+1)\,dx}{x^4+4x^2+4}$.

529*. $\int\frac{1-x^4}{1+x^4}\,dx$.

§ 8. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Иррациональные (и трансцендентные) функции интегрируются в элементарных функциях только в некоторых определенных случаях. Наиболее употребительны следующие виды интегралов от иррациональных функций, которые выражаются через элементарные функции:

I. Интеграл $\int R(x, x^\alpha, x^\beta, \ldots)\,dx$, где R — рациональная функция, $\alpha=\frac{m_1}{n_1}$, $\beta=\frac{m_2}{n_2}$, ... — рациональные числа, сводится к интегралу от рациональной функции, и, следовательно, выражается в элементарных функциях с помощью подстановки $x=t^k$, где k — общий знаменатель всех дробных показателей у x.

Интегралы более общего вида $\int R[x, (ax+b)^\alpha, (ax+b)^\beta, \ldots]\,dx$ или $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^\alpha, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^\beta, \ldots\right]dx$ находятся (приводятся к рациональному виду) с помощью аналогичных подстановок: $ax+b=t^k$ или $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$.

II. К интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций, сводятся интегралы:

$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})\,dx$ — подстановкой $x=a\sin t$;

$\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})\,dx$ — подстановкой $x=a\operatorname{tg} t$;

$\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})\,dx$ — подстановкой $x=a\sec t$.

III. Интеграл от дифференциального бинома $\int x^m (a+bx^n)^p dx$ сводится к интегралу от рациональной функции в трех случаях: *

1) когда p — целое число, — разложением на слагаемые по формуле бинома Ньютона,

2) когда $\frac{m+1}{n}$ — целое число, — подстановкой $a+bx^n=z^r$,

3) когда $\frac{m+1}{n}+p$ — целое число, — подстановкой $a+bx^n=x^n z^r$,

где r — знаменатель дроби p.

IV. Интеграл $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{v}} dx$, где $P_n(x)$ — многочлен n-й степени, $v=ax^2+bx+c$, можно найти по формуле

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{v}} dx = (A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n)\sqrt{v} + B\int \frac{dx}{\sqrt{v}},$$

где $A_1, A_2, \ldots, B$ — постоянные, определяемые путем дифференцирования этого равенства, умножения его на $\sqrt{v}$ и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях x.

Подобным путем можно найти и интеграл

$$\int P_n(x)\sqrt{v}\,dx = \int \frac{vP_n(x)}{\sqrt{v}} dx =$$

$$= (A_1 x^{n+1} + A_2 x^n + \ldots + A_{n+2})\sqrt{v} + B\int \frac{dx}{\sqrt{v}}.$$

V. Интеграл $\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ можно найти подстановкой $x-\alpha=\frac{1}{t}$.

530. Найти интегралы:

1) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx$; 2) $\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}} dx$; 3) $\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6} dx$;

4) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(1+x^3)^5}}$; 5) $\int \frac{2x^2-x-5}{\sqrt{x^2-2x}} dx$; 6) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. 1) Положив $x=t^4$, согласно правилу I, получим $dx=4t^3dt$ и

$$I=\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}} dx = \int \frac{1+t}{t^4+t^2} 4t^3\,dt = 4\int \frac{t^2+t}{t^2+1} dt =$$

$$= 4\int \left(1+\frac{t-1}{t^2+1}\right) dt = 4\left(\int dt + \int \frac{t\,dt}{t^2+1} - \int \frac{dt}{t^2+1}\right) =$$

$$= 4t + 2\ln(t^2+1) - 4\,\mathrm{arc\,tg}\,t + C.$$

Возвращаясь к переменной x, имеем

$$I = 4\sqrt[4]{x} + 2\ln(1+\sqrt{x}) - 4\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt[4]{x} + C.$$

* Это доказано П. Л. Чебышевым.

2) Применяя правило I, берем подстановку $\frac{1+x}{x}=t^2$, откуда найдем $x=\frac{1}{t^2-1}$, $dx=-\frac{2t\,dt}{(t^2-1)^2}$,

$$\int \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx=\int (t^2-1)^2 t\cdot\frac{-2t\,dt}{(t^2-1)^2}=-2\int t^2\,dt=$$

$$=-\frac{2}{3}t^3+C=C-\frac{2}{3}\sqrt{\left(\frac{1+x}{x}\right)^3}.$$

3) Применяя подстановку $x=2\sin t$, получим $dx=2\cos t\,dt$ и

$$\int \frac{\sqrt{(4-x^2)^3}}{x^6}\,dx=\int \frac{\sqrt{(4-4\sin^2 t)^3}}{64\sin^6 t}\,2\cos t\,dt=\frac{1}{4}\int \frac{\cos^4 t}{\sin^6 t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int \frac{\operatorname{ctg}^4 t}{\sin^2 t}\,dt=-\frac{1}{4}\int \operatorname{ctg}^4 t\,d\operatorname{ctg} t=-\frac{1}{20}\operatorname{ctg}^5 t+C=C-\frac{\sqrt{(4-x^2)^5}}{20x^5}.$$

4) Это интеграл от дифференциального бинома:

$$I=\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(1+x^3)^5}}=\int x^{-2}(1+x^3)^{-\frac{5}{3}}\,dx,$$

где $m=-2$, $n=3$, $p=-\frac{5}{3}$.

Здесь $\frac{m+1}{n}+p=-2$ — целое число.

Поэтому согласно правилу III полагаем $1+x^3=x^3z^3$. Тогда

$$x^3=\frac{1}{z^3-1};\quad 1+x^3=\frac{z^3}{z^3-1};\quad x=(z^3-1)^{-\frac{1}{3}};$$

$$dx=-z^2(z^3-1)^{-\frac{4}{3}}\,dz;$$

$$I=-\int (z^3-1)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{z^3}{z^3-1}\right)^{-\frac{5}{3}} z^2(z^3-1)^{-\frac{4}{3}}\,dz=\int \frac{1-z^3}{z^3}\,dz=$$

$$=\int z^{-3}dz-\int dz=\frac{z^{-2}}{-2}-z+C=C-\frac{1+2z^3}{2z^2}=C-\frac{2+3x^3}{2x\sqrt[3]{(1+x^3)^2}}.$$

5) Согласно правилу IV применяем следующую схему интегрирования:

$$I=\int \frac{2x^2-x-5}{\sqrt{x^2-2x}}\,dx=(Ax+B)\sqrt{x^2-2x}+D\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}.$$

Для определения постоянных A, B, D дифференцируем обе части равенства, затем умножаем его на $\sqrt{x^2-2x}$:

$$\frac{2x^2-x-5}{\sqrt{x^2-2x}}=A\sqrt{x^2-2x}+(Ax+B)\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}+\frac{D}{\sqrt{x^2-2x}};$$

$$2x^2-x-5=A(x^2-2x)+(Ax+B)(x-1)+D=$$
$$=2Ax^2+(B-3A)x+(D-B).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях последнего равенства, получим систему уравнений:

$$2A=2;\quad B-3A=-1;\quad D-B=-5.$$

Решим эту систему: $A=1$, $B=2$, $D=-3$ и подставим значения A, B, D в схему интегрирования:

$$I=(x+2)\sqrt{x^2-2x}-3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}.$$

Последний интеграл преобразуем к формуле 11:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x}}=\int\frac{d(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2-1}}=\ln\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2-1}\right|.$$

Подставляя в предыдущее равенство, окончательно получим

$$I=(x+2)\sqrt{x^2-2x}-3\ln\left|x-1+\sqrt{x^2-2x}\right|+C.$$

б) Согласно правилу V применяем подстановку $x-1=\frac{1}{t}$, тогда $dx=-\frac{1}{t^2}dt$,

$$I=\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}=\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{-\frac{1+2t}{t^2}}}=$$

$$=-\int\frac{|t|\,dt}{t\sqrt{-1-2t}}=\int\frac{dt}{\sqrt{-1-2t}}.$$

Здесь учтено, что $\sqrt{t^2}=|t|$, что подынтегральная функция определена в интервале $-1<x<1$, вследствие чего $x-1<0$ и $t<0$ и что поэтому $|t|=-t$.

Далее преобразуем интеграл к формуле 1:

$$I=\int(-1-2t)^{-\frac{1}{2}}dt=-\frac{1}{2}\int(-1-2t)^{-\frac{1}{2}}d(-1-2t)=$$

$$=-(-1-2t)^{\frac{1}{2}}+C=C-\sqrt{-1-\frac{2}{x-1}}=C-\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}.$$

Найти интегралы:

531. $\int\frac{dx}{(1+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$.

532. $\int x\sqrt{3-x}\,dx$.

533. $\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}\,dx$.

534. $\int\frac{dx}{\sqrt{(5-x^2)^3}}$.

535. $\int\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\,dx$.

536. $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,dx$.

537*. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$.

538*. $\int\frac{\sqrt[3]{(1+2x^3)^2}}{x^6}\,dx$.

539*. $\int\frac{dt}{t\sqrt{1-t^3}}$.

540. $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

541. $\int\frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$.

542*. $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$.