

## § 9. Интегрирование некоторых трансцендентных (неалгебраических) функций

К интегралам от рациональных функций сводятся следующие интегралы, где  $R$  — рациональная функция:

I.  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  — подстановкой  $z = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ .

При этом  $\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$ ,  $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ ,  $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$ .

II.  $\int R(\operatorname{tg} x) dx$  — подстановкой  $\operatorname{tg} x = z$ .

При этом  $x = \operatorname{arctg} z$ ,  $dx = \frac{dz}{1+z^2}$ .

III.  $\int R(e^x) dx$  — подстановкой  $e^x = z$ . При этом  $x = \ln z$ ,  $dx = \frac{dz}{z}$ .

543. Найти интегралы:

1)  $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x}$ ;

2)  $\int \frac{dx}{5 + 4 \cos ax}$ ;

3)  $\int \frac{\operatorname{tg} x dx}{1 - \operatorname{ctg}^2 x}$ ;

4)  $\int \frac{e^{3x} dx}{e^{2x} + 1}$ .

Решение. 1) Полагая  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$  и заменяя  $\sin x$ ,  $\cos x$  и  $dx$  указанными их выражениями через  $z$ , вытекающими из этой подстановки, получим

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x} &= \int \frac{2 dz}{z^2 + 4z - 1} = 2 \int \frac{d(z+2)}{(z+2)^2 - 5} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{z+2 - \sqrt{5}}{z+2 + \sqrt{5}} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2 - \sqrt{5} + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{2 + \sqrt{5} + \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C. \end{aligned}$$

2) Полагая  $\operatorname{tg} \frac{ax}{2} = z$ , согласно правилу I имеем

$$\begin{aligned} \cos ax &= \frac{1-z^2}{1+z^2}, \quad dx = \frac{2dz}{a(1+z^2)}, \\ \int \frac{dx}{5+4 \cos ax} &= \frac{2}{a} \int \frac{dz}{z^2+9} = \frac{2}{3a} \operatorname{arctg} \frac{z}{3} + C = \frac{2}{3a} \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{ax}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

3) Полагая  $\operatorname{tg} x = z$ , согласно правилу II получим

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{tg} x dx}{1 - \operatorname{ctg}^2 x} &= \int \frac{z^2 dz}{z^4 - 1} = \frac{1}{4} \int \frac{d(z^4 - 1)}{z^4 - 1} = \frac{1}{4} \ln |z^4 - 1| + \\ &+ C = \frac{1}{4} \ln |\operatorname{tg}^4 x - 1| + C. \end{aligned}$$

4) Применяя подстановку  $e^x = z$ , получим  $dx = \frac{dz}{z}$  и

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{3x} dx}{e^{2x} + 1} &= \int \frac{z^3 dz}{(z^2 + 1)z} = \int \frac{z^2 dz}{z^2 + 1} = \int \left( 1 - \frac{1}{z^2 + 1} \right) dz = \\ &= \int dz - \int \frac{dz}{z^2 + 1} = z - \operatorname{arctg} z + C = e^x - \operatorname{arctg} e^x + C. \end{aligned}$$

Найти интегралы:

$$544. \int \frac{\cos x \, dx}{1 + \cos x}.$$

$$546. \int \frac{dx}{\sin^3 x}.$$

$$548. \int \operatorname{tg}^5 3x \, dx.$$

$$550. \int \frac{e^{2t} - 2e^t}{1 + e^{2t}} dt.$$

$$552^*. \int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx.$$

$$545. \int \frac{dx}{\sin kx}.$$

$$547. \int \frac{dx}{4 \cos x + 3 \sin x}.$$

$$549. \int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}.$$

$$551. \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx.$$

$$553^*. \int \frac{e^{2x} dx}{(2 + e^x + e^{-x})^2}.$$

## § 10. Смешанные задачи на интегрирование

В предыдущих параграфах указывались способы отыскания заданных интегралов. Здесь студент должен самостоятельно избирать тот или другой способ для отыскания каждого из следующих интегралов:

$$554. \int \frac{dx}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}}.$$

$$556. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$558. \int \frac{dz}{9 \sin^2 z + \cos^2 z}.$$

$$560. \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx.$$

$$562. \int \arccos x \, dx.$$

$$564. \int \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t} dt.$$

$$566. \int \frac{x-5}{\sqrt{x^2 + 10x}} dx.$$

$$568. \int (1 - \ln x)^2 dx.$$

$$570. \int \frac{\sqrt{x^2 - 7}}{x^4} dx.$$

$$572. \int \arccos \sqrt{v} \, dv.$$

$$574. \int \frac{12x^2 + 21x + 14}{\sqrt{3x^2 + 3x + 4}} dx.$$

$$576. \int \frac{x^3 dx}{2 + \sqrt{4 - x^2}}.$$

$$578. \int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$580^*. \int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx.$$

$$555. \int x \cos^2 x \, dx.$$

$$557. \int \frac{3e^{2x} + 2e^{x^2}}{e^{2x} + e^x - 2} dx.$$

$$559. \int \frac{(x^4 + 1) dx}{x^3 - x^2 + x - 1}.$$

$$561. \int \frac{x^2 + \sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}} dx.$$

$$563^*. \int \frac{dr}{\sqrt{r} \sqrt{1 + \sqrt{r}}}.$$

$$565. \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

$$567. \int (x^2 + x + 1) e^x dx.$$

$$569. \int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x} dx.$$

$$571. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(4x+1)^6}}.$$

$$573. \int \frac{2x-3}{(2x+3)^4} dx.$$

$$575. \int \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx.$$

$$577^*. \int \frac{dx}{4 + 3 \operatorname{tg} x}.$$

$$579. \int x \arcsin x \, dx.$$

$$581^*. \int \frac{dx}{(x+1) \sqrt{1-x^2}}.$$