ГЛАВА V

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Определенный интеграл как предел интегральных сумм, его свойства и связь с неопределенным интегралом

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и если: 1) разделить этот отрезок произвольным способом на n частичных отрезков длиною $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \ldots, \Delta x_n$, 2) выбрать в каждом частичном отрезке по одной произвольной точке $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$, 3) вычислить значения функции $f(x)$ в выбранных точках и 4) составить сумму

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

то она называется **интегральной суммой** функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

По-разному деля отрезок $[a, b]$ на n частичных отрезков и поразному выбирая в них по одной точке ξ_i, можно для всякой заданной функции $f(x)$ и всякого заданного отрезка $[a, b]$ составить бесчисленное множество различных интегральных сумм. При этом оказывается, что все эти различные интегральные суммы при неограниченном возрастании n и при стремлении к нулю наибольшей из длин частичных отрезков, имеют один общий предел. Этот *общий предел всех интегральных сумм функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется определенным интегралом от $f(x)$ в пределах от a до b* и обозначается $\int_a^b f(x)\,dx$.

Простейшие свойства определенного интеграла:

1. *При перестановке пределов изменяется знак интеграла*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

2. *Интеграл с одинаковыми пределами равен нулю*: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

3. *Отрезок интегрирования можно разбивать на части:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

4. *Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от всех слагаемых:*

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_3(x)\,dx.$$

5. *Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:*

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Для вычисления определенного интеграла, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл, служит **формула Ньютона—Лейбница**

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)\,dx\Big|_a^b = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \qquad (*)$$

— определенный интеграл равен разности значений неопределенного интеграла при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

582. Вычислить интегралы:

$$1)\ \int_2^3 3x^2\,dx; \qquad 2)\ \int_0^4 \left(1 + e^{\frac{x}{4}}\right) dx;$$

$$3)\ \int_{-1}^7 \frac{dt}{\sqrt{3t+4}}; \qquad 4)\ \int_0^{\frac{\pi}{2a}} (x+3)\sin ax\,dx.$$

Решение. Применяя формулу Ньютона—Лейбница (*) и свойства определенного интеграла, получим:

$$1)\ \int_2^3 3x^2\,dx = 3\int_2^3 x^2\,dx = x^3\Big|_2^3 = 3^3 - 2^3 = 19.$$

$$2)\ \int_0^4 \left(1 + e^{\frac{x}{4}}\right) dx = \int_0^4 dx + 4\int_0^4 e^{\frac{x}{4}} d\frac{x}{4} = x + 4e^{\frac{x}{4}}\Big|_0^4 = 4 + 4e - 4 = 4e.$$

$$3)\ \int_{-1}^7 \frac{dt}{\sqrt{3t+4}} = \frac{1}{3}\int_{-1}^7 (3t+4)^{-\frac{1}{2}} d(3t+4) = \frac{2}{3}(3t+4)^{\frac{1}{2}}\Big|_{-1}^7 =$$

$$= \frac{2}{3}(5-1) = \frac{8}{3}.$$

4) Здесь для нахождения неопределенного интеграла применяем формулу интегрирования по частям $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Полагая $u=x+3$, $dv=\sin ax\,dx$, получим $du=dx$,

$$v=\int \sin ax\,dx=\frac{1}{a}\int \sin ax\,d(ax)=-\frac{1}{a}\cos ax,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2a}} (x+3)\sin ax\,dx=-\frac{x+3}{a}\cos ax+\frac{1}{a}\int \cos ax\,dx\Big|_0^{\frac{\pi}{2a}}=$$

$$=-\frac{x+3}{a}\cos ax+\frac{1}{a^2}\sin ax\Big|_0^{\frac{\pi}{2a}}=\frac{1}{a^2}+\frac{3}{a}=\frac{1+3a}{a^2}.$$

Вычислить интегралы:

583. $\int_1^5 \frac{dx}{3x-2}$.

584. $\int_0^1 \frac{dz}{(2z+1)^3}$.

585. $\int_1^2 \frac{dt}{t^2+5t+4}$.

586. $\int_0^2 \frac{x+3}{x^2+4}\,dx$.

587. $\int_{-a}^{a} x\cos\frac{x}{a}\,dx$.

588. $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}\,dx$.

589*. $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\cos x\,dx$.

590. $\int_1^e (1+\ln y)^2\,dy$.

§ 2. Замена переменной в определенном интеграле

Для вычисления многих определенных интегралов полезно заменять переменную интегрирования. При этом, если определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ преобразуется при помощи подстановки $x=\varphi(t)$ [или $t=\psi(x)$] в другой интеграл, с новой переменной интегрирования t, то *заданные пределы* $x_1=a$ *и* $x_2=b$ *заменяются новыми пределами* $t_1=\alpha$ и $t_2=\beta$, которые определяются из исходной подстановки, т. е. из уравнений $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ [или $\alpha=\psi(a)$, $\beta=\psi(b)$]. Если $\varphi'(t)$ и $f[\varphi(t)]$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt=\int_\alpha^\beta F(t)\,dt.$$

591. Вычислить интегралы:

1) $\int_0^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+3x}}$; 2) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$; 3) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3+1)\,dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$.