Полагая $u=x+3$, $dv=\sin ax\,dx$, получим $du=dx$,

$$v=\int \sin ax\,dx=\frac{1}{a}\int \sin ax\,d(ax)=-\frac{1}{a}\cos ax,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2a}} (x+3)\sin ax\,dx=-\frac{x+3}{a}\cos ax+\frac{1}{a}\int \cos ax\,dx\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2a}}=$$

$$=-\frac{x+3}{a}\cos ax+\frac{1}{a^2}\sin ax\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2a}}=\frac{1}{a^2}+\frac{3}{a}=\frac{1+3a}{a^2}.$$

Вычислить интегралы:

583. $\int_1^5 \frac{dx}{3x-2}$.

584. $\int_0^1 \frac{dz}{(2z+1)^3}$.

585. $\int_1^2 \frac{dt}{t^2+5t+4}$.

586. $\int_0^2 \frac{x+3}{x^2+4}\,dx$.

587. $\int_{-a}^{a} x\cos\frac{x}{a}\,dx$.

588. $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}\,dx$.

589*. $\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\cos x\,dx$.

590. $\int_1^e (1+\ln y)^2\,dy$.

§ 2. Замена переменной в определенном интеграле

Для вычисления многих определенных интегралов полезно заменять переменную интегрирования. При этом, если определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ преобразуется при помощи подстановки $x=\varphi(t)$ [или $t=\psi(x)$] в другой интеграл, с новой переменной интегрирования t, то *заданные пределы* $x_1=a$ *и* $x_2=b$ *заменяются новыми пределами* $t_1=\alpha$ и $t_2=\beta$, которые определяются из исходной подстановки, т. е. из уравнений $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$ [или $\alpha=\psi(a)$, $\beta=\psi(b)$]. Если $\varphi'(t)$ и $f[\varphi(t)]$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt=\int_\alpha^\beta F(t)\,dt.$$

591. Вычислить интегралы:

1) $\int_0^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+3x}}$; 2) $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x-e^{-x}}$; 3) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{(x^3+1)\,dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$; 4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$.

Решение. 1) Вводим новую переменную интегрирования, полагая $\sqrt{1+3x}=t$. Отсюда находим $x=\frac{t^2-1}{3}$, $dx=\frac{2}{3}t\,dt$ и новые пределы интеграла: $t_1=1$ при $x_1=0$, $t_2=4$ при $x_2=5$. Подставляя, получим

$$\int_0^5 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+3x}}=\frac{2}{9}\int_1^4 (t^2-1)\,dt=\frac{2}{9}\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_1^4=$$

$$=\frac{2}{9}\left(\frac{64-1}{3}-4+1\right)=4.$$

2) Полагая $e^x=t$, имеем $x=\ln t$, $dx=\frac{dt}{t}$; $t_1=2$ при $x_1=\ln 2$; $t_2=3$ при $x_2=\ln 3$ и

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3}\frac{dx}{e^x-e^{-x}}=\int_2^3\frac{dt}{t\,(t-t^{-1})}=\int_2^3\frac{dt}{t^2-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1}\Bigg|_2^3=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{4}-\ln\frac{1}{3}\right)=\frac{\ln 1{,}5}{2}.$$

3) Полагая $x=2\sin t$, получим: $dx=2\cos t\,dt$; $t_1=\frac{\pi}{6}$ при $x_1=1$; $t_2=\frac{\pi}{3}$ при $x_2=\sqrt{3}$;

$$\int_1^{\sqrt{3}}\frac{(x^3+1)\,dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{8\sin^3 t+1}{4\sin^2 t}dt=2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin t\,dt+\frac{1}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dt}{\sin^2 t}=$$

$$=-2\cos t-\frac{1}{4}\operatorname{ctg} t\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=-2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}\right)=$$

$$=\frac{7}{2\sqrt{3}}-1.$$

4) Заменяя переменную при помощи подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$, найдем $\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$; $dx=\frac{2dz}{1+z^2}$ (см. гл. IV, § 9); $z_1=0$ при $x_1=0$; $z_2=1$ при $x_2=\frac{\pi}{2}$ и

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\cos x}=2\int_0^1\frac{dz}{z^2+3}=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^1=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

592. Доказать, что для четной функции $f(x)$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx,$$

а для нечетной функции $f(x)$:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Решение. Разделив отрезок интегрирования $[-a, a]$ точкой $x=0$ на две части, согласно свойству 3 получим тождество

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{-a}^{0} f(x)\,dx.$$

Заменив переменную в последнем интеграле по формуле $x = -z$, имеем $dx = -dz$; $z_1 = a$ при $x_1 = -a$; $z_2 = 0$ при $x_2 = 0$;

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-z)\,dz = \int_{0}^{a} f(-z)\,dz = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx,$$

так как *значение определенного интеграла не зависит от того, какой буквой обозначена переменная интегрирования*. Следовательно,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(-x)\,dx = \int_{0}^{a} [f(x)+f(-x)]\,dx.$$

Для четной функции $f(-x)=f(x)$, а для нечетной функции $f(-x)=-f(x)$, поэтому

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx, & \text{если } f(x) \text{ четная,} \\ 0, & \text{если } f(x) \text{ нечетная.} \end{cases}$$

Пользуясь доказанными положениями, можно упрощать вычисление некоторых определенных интегралов. Например:

1) без вычислений, заключаем:

$$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} (3x-2x^5)\,dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^7 2x\,dx = 0, \quad \int_{3}^{-3} t^8 \arcsin t\,dt = 0$$

вследствие нечетности подынтегральной функции;

2) $$\int_{-2}^{2} \frac{x^5+7x^4+x^3-5x^2-2}{x^3+x}\,dx = \int_{-2}^{2} \frac{7x^4-5x^2-2}{x^3+x}\,dx +$$

$$+ \int_{-2}^{2} \frac{x^5+x^3}{x^3+x}\,dx = 0 + 2\int_{0}^{2} x^2\,dx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{2} = \frac{16}{3},$$

вследствие того, что под знаком первого интеграла функция нечетная, а под знаком второго — четная.

Вычислить интегралы:

593. $\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{(x+1)^4}$. Подстановка $x+1=z$.

594. $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$. Подстановка $\sqrt{e^x-1}=t$.

595. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}} \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$. Подстановка $z=x^2+1$.

596. $\int\limits_1^e \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x}\,dx$. Подстановка $t=1+\ln x$.

597. $\int\limits_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$. Подстановка $x=3\cos\varphi$.

598. $\int\limits_5^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{5+4t}}$.

599. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi}\,d\varphi$.

600. $\int\limits_{\ln 2}^{0} \frac{1-e^x}{1+e^x}\,dx$.

601. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

602*. $\int\limits_0^3 \sqrt{\frac{x}{6-x}}\,dx$.

603*. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\sqrt{\cos\varphi}\,d\varphi$.

§ 3. Схема применения определенного интеграла к вычислению различных величин. Площадь плоской фигуры

Понятие определенного интеграла вследствие его абстрактности широко применяется для вычисления различных геометрических и физических величин.

Для вычисления некоторой величины u при помощи определенного интеграла можно руководствоваться следующей общей схемой (I):

1. Разбить u на большое число n малых слагаемых элементов Δu_i:

$$u=\Delta u_1+\Delta u_2+\ldots+\Delta u_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta u_i.$$