вследствие того, что под знаком первого интеграла функция нечетная, а под знаком второго — четная.

Вычислить интегралы:

593. $\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{(x+1)^4}$. Подстановка $x+1=z$.

594. $\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$. Подстановка $\sqrt{e^x-1}=t$.

595. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{7}} \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$. Подстановка $z=x^2+1$.

596. $\int\limits_1^e \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x}\,dx$. Подстановка $t=1+\ln x$.

597. $\int\limits_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\,dx$. Подстановка $x=3\cos\varphi$.

598. $\int\limits_5^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{5+4t}}$.

599. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi}\,d\varphi$.

600. $\int\limits_{\ln 2}^{0} \frac{1-e^x}{1+e^x}\,dx$.

601. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

602*. $\int\limits_0^3 \sqrt{\frac{x}{6-x}}\,dx$.

603*. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\sqrt{\cos\varphi}\,d\varphi$.

§ 3. Схема применения определенного интеграла к вычислению различных величин. Площадь плоской фигуры

Понятие определенного интеграла вследствие его абстрактности широко применяется для вычисления различных геометрических и физических величин.

Для вычисления некоторой величины u при помощи определенного интеграла можно руководствоваться следующей общей схемой (I):

1. Разбить u на большое число n малых слагаемых элементов Δu_i:

$$u=\Delta u_1+\Delta u_2+\ldots+\Delta u_n=\sum_{i=1}^{n}\Delta u_i.$$

2. Найти приближенное значение каждого элемента Δu_i в виде произведения $\Delta u_i \approx f(x_i) \cdot \Delta x$ и затем приближенное значение u в виде интегральной суммы

$$u \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x, \qquad (*)$$

где x — один из параметров величины u, который по условию задачи изменяется в известном интервале $a \leqslant x \leqslant b$; $f(x)$ — данная или определяемая из условия задачи функция от x; $x_0 = a$, x_1, x_2, ..., $x_n = b$ — точки интервала $[a, b]$, которые при разбиении u на n элементов разбивают этот интервал на n равных частей $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Здесь при нахождении приближенного значения малого элемента Δu_i используются различные допущения. Например, здесь допустимо малые криволинейные отрезки заменять стягивающими их хордами; переменную силу (или скорость) на малых участках пути здесь можно заменять постоянной силой (или скоростью),— допуская, что она неизменно сохраняет на всем малом участке пути ту величину и то направление, которые она имела в начальной или конечной точке этого малого участка; переменную температуру непрерывно нагреваемого или охлаждаемого тела в течение малых промежутков времени здесь можно считать постоянной, допуская, что в течение каждого малого промежутка времени она неизменно сохраняет то значение, которое имела в начале или в конце этого промежутка.

3. Если из условия задачи следует, что при $n \to +\infty$ погрешность приближенного равенства $(*)$ стремится к нулю, то искомая величина u будет численно равна определенному интегралу $u = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Многие величины можно выразить посредством определенного интеграла, пользуясь другой схемой (II):

1. Полагаем, что некоторая часть искомой величины U есть неизвестная функция $u(x)$, где x — один из параметров величины U, который изменяется в известном из условия задачи интервале $a \leqslant x \leqslant b$.

2. Найдем дифференциал du функции $u(x)$, т. е. приближенную величину (главную часть) ее приращения Δu при изменении x на малую величину dx в виде произведения $du = f(x)\,dx$, где $f(x)$ данная или определяемая из условия задачи функция от x.

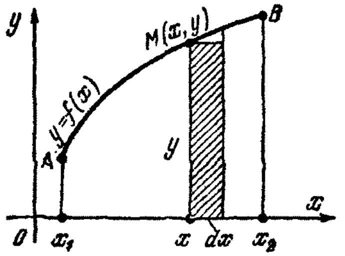
При этом здесь также используются различные допущения, которые в общем сводятся к тому, что при изменении аргумента x на малую величину dx изменение функции $u(x)$ считается пропорциональным dx.

3. Убедившись, что дифференциал du найден верно, что при $dx \to 0$ бесконечно малые Δu и du будут эквивалентны, найдем искомую величину U, интегрируя du в пределах от $x = a$ до $x = b$:

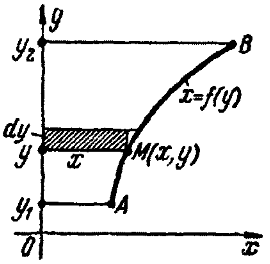
$$U = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Так, согласно схеме II:

а) Для криволинейной трапеции, прилежащей к оси Ox, черт. 87, дифференциал переменной площади $S(x) = S_{x_1AMx}$ есть площадь прямоугольника со сторонами y и dx, т. е. $dS = y\,dx$.



Черт. 87



Черт. 88

Площадь $S_{x_1ABx_2}$, если вся трапеция расположена над осью Ox, выражается интегралом

$$S = \int_{x_1}^{x_2} y\,dx. \tag{1}$$

б) Для криволинейной трапеции, прилежащей к оси Oy, черт. 88, дифференциал переменной площади $S(y) = S_{y_1AMy}$ есть площадь прямоугольника со сторонами x и dy, т. е. $dS = x\,dy$.

Площадь $S_{y_1ABy_2}$, если вся трапеция расположена справа от оси Oy, выражается интегралом

$$S = \int_{y_1}^{y_2} x\,dy. \tag{2}$$

В частности каждая из параллельных сторон трапеции а) или б) может свестись к точке.

Площадь всякой плоской фигуры, отнесенной к прямоугольной системе координат, может быть составлена из площадей криволинейных трапеций, прилежащих к оси Ox или к оси Oy.

в) Дифференциал переменной площади $S(\varphi) = S_{OAM}$, черт. 89, есть площадь кругового сектора с центральным углом $d\varphi$ и радиусом ρ, т. е. $dS = \frac{1}{2}\rho^2 d\varphi$.

Площадь криволинейного сектора OAB выражается формулой

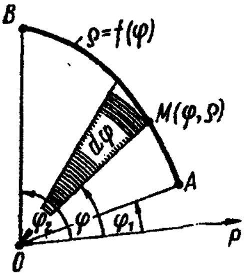
$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 d\varphi. \qquad (3)$$

В частности точка A или B или обе они могут совпасть с полюсом O.

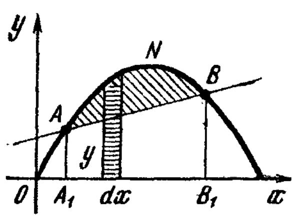
Площадь всякой плоской фигуры, отнесенной к полярной системе координат, может быть составлена из площадей криволинейных секторов.

604. Вычислить площадь, ограниченную следующими линиями:

1) параболой $4y = 8x - x^2$ и прямой $4y = x + 6$;
2) параболами $y = 4 - x^2$ и $y = x^2 - 2x$;
3) кубическими параболами $6x = y^3 - 16y$ и $24x = y^3 - 16y$;
4) эллипсом $x = a\cos t$, $y = a\sin t$;
5) кардиоидой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$;
6) окружностями $\rho = 2\sqrt{3}\, a\cos\varphi$ и $\rho = 2a\sin\varphi$.



Черт. 89



Черт. 90

Решение. 1) Совместно решая данные уравнения, определим две точки пересечения линий, ограничивающих искомую площадь, $A\left(1;\ \frac{7}{4}\right)$, $B(6;\ 3)$. Построив эти точки и проходящие через них данные линии, черт. 90, видим, что искомая площадь ANB равна разности площадей $S_1 = A_1ANBB_1$ и $S_2 = A_1ABB_1$.

Площадь S_1 согласно формуле (1) выражается интегралом

$$S_1 = \int_1^6 y\,dx = \frac{1}{4}\int_1^6 (8x - x^2)\,dx = \frac{1}{4}\left(4x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^6 = \frac{205}{12}.$$

Площадь S_2 трапеции A_1ABB_1 равна произведению полусуммы ее оснований на высоту:

$$S_2 = \frac{A_1A + B_1B}{2}\cdot A_1B_1 = \frac{95}{8}.$$

Следовательно, искомая площадь $S = S_1 - S_2 = \frac{205}{12} - \frac{95}{8} = 5\frac{5}{24}$.

Если за единицу длины принят дециметр, то $S = 5\frac{5}{24}$ *кв. дм.*

2) Определив точки пересечения парабол $A(-1;\ 3)$ и $B(2;\ 0)$ и построив эти точки и параболы, черт. 91, видим, что искомую площадь S можно найти как алгебраическую сумму площадей криволинейных трапеций: $S = S_{A_1ACB} + S_{OBD} - S_{A_1AO}$.

$$S_{A_1ACB} = \int\limits_{-1}^{2} (4 - x^2)\,dx = 4x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = 8 - \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{3} = 9.$$

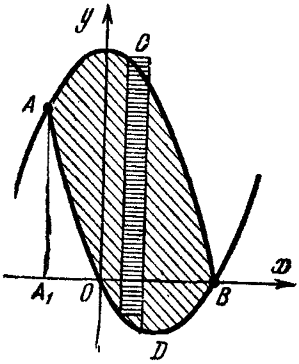
$$S_{OBD} = \int\limits_{2}^{0} (x^2 - 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} - x^2\Big|_{2}^{0} = -\frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}.$$

Площадь OBD расположена под осью Ox, поэтому, чтобы получить ее величину с положительным знаком, пределы интегрирования взяты справа налево.

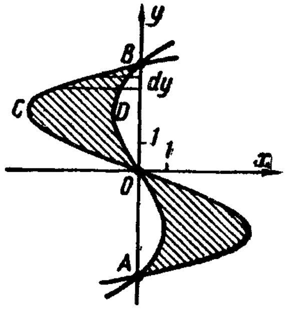
$$S_{A_1AO} = \int\limits_{-1}^{0} (x^2 - 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} - x^2\Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}.$$

Следовательно, $S = 9 + \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 9.$

Площадь S можно найти иначе, определив ее дифференциал ds как площадь прямоугольника, у которого высота есть разность



Черт. 91



Черт. 92

ординат данных парабол, а основание dx, черт. 91:

$$ds = (y_1 - y_2)\,dx = [(4 - x^2) - (x^2 - 2x)]\,dx = (4 + 2x - 2x^2)\,dx.$$

Отсюда $S = \int\limits_{-1}^{2} (4 + 2x - 2x^2)\,dx = 4x + x^2 - \frac{2}{3}x^3\Big|_{-1}^{2} = 9.$

3) Находим три точки пересечения данных парабол: $O(0,\ 0)$, $A(0;\ -4)$, $B(0;\ 4)$, затем строим эти точки и параболы, черт. 92.

Искомая площадь S состоит из двух одинаковых частей; половину ее можно найти как разность площадей криволинейных трапеций OCB и ODB, прилежащих к оси Oy. Согласно формуле (2) имеем

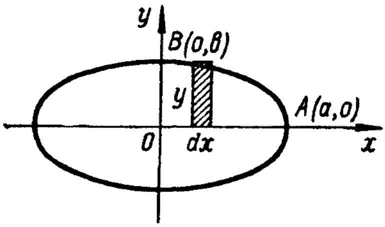
$$S_{OCB}=\int_4^0 x_1\,dy=\frac{1}{6}\int_4^0 (y^3-16y)\,dy;$$

$$S_{ODB}=\int_4^0 x_2\,dy=\frac{1}{24}\int_4^0 (y^3-16y)\,dy;$$

$$S=2(S_{OCB}-S_{ODB})=2\int_4^0 (x_1-x_2)\,dy=\frac{1}{4}\int_4^0 (y^3-16y)\,dy=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{y^4}{4}-8y^2\right)\Bigg|_4^0=\frac{1}{4}(-64+128)=16.$$

4) Оси координат совпадают с осями симметрии данного эллипса (черт. 93), и поэтому они делят его на четыре одинаковые части. Четвертую часть искомой площади S, расположенную в первом квадранте, найдем как площадь криволинейной трапеции, прилежащей к оси Ox:



Черт. 93

$$\frac{1}{4}S=\int_0^a y\,dx.$$

Пользуясь данными параметрическими уравнениями эллипса, преобразуем интеграл к переменной t; $y=b\sin t$, $dx=-a\sin t\,dt$; когда $x=0$, то $t=\frac{\pi}{2}$; когда $x=a$, то $t=0$;

$$S=4\int_0^a y\,dx=-4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t\,dt=$$

$$=2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)\,dt=2ab\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi ab.$$

Отсюда при $a=b$ получается формула для площади круга: $S=\pi a^2$.

5) Кардиоида симметрична относительно полярной оси (черт. 94). Поэтому искомая площадь равна удвоенной площади

криволинейного сектора OAB. Дуга ABO описывается концом полярного радиуса ρ при изменении полярного угла φ от 0 до π.

Поэтому согласно формуле (3)

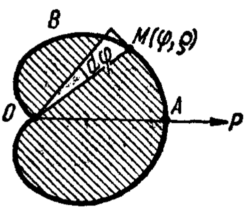
$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \rho^2 \, d\varphi = a^2 \int_0^{\pi} (1 + \cos\varphi)^2 \, d\varphi =$$

$$= a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) \, d\varphi =$$

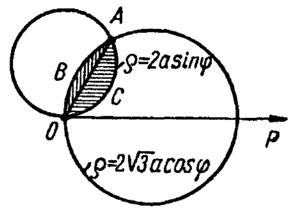
$$= a^2 \left[\int d\varphi + 2 \int \cos\varphi \, d\varphi + \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2\varphi) \, d\varphi \right] \Big|_0^{\pi} =$$

$$= a^2 \left(\frac{3}{2} \varphi + 2 \sin\varphi + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{3}{2} \pi a^2.$$

6) Решив совместно данные уравнения, найдем точку пересечения окружностей $A\left(\frac{\pi}{3}, a\sqrt{3}\right)$. Построив окружности,



Черт. 94



Черт. 95

черт. 95, видим, что искомая площадь S равна сумме площадей криволинейных секторов OBA и OCA.

Дуга ABO описывается концом полярного радиуса ρ большей окружности при изменении полярного угла φ от $\frac{\pi}{3}$ до $\frac{\pi}{2}$, поэтому

$$S_{OBA} = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \, d\varphi = 6a^2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \, d\varphi = 3a^2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi) \, d\varphi =$$

$$= 3a^2 \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 3a^2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right).$$

Дуга OCA описывается концом полярного радиуса ρ меньшей окружности при изменении полярного угла от 0 до $\frac{\pi}{3}$, поэтому

$$S_{OCA}=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\rho^2\,d\varphi=2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2\varphi\,d\varphi=a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=a^2\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=a^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Следовательно, $S=S_{OBA}+S_{OCA}=a^2\left(\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}\right)\approx 0{,}89.$

Найти площадь, ограниченную линиями:

605. Параболой $y=6x-x^2$ и осью Ox.

606. Полукубической параболой $y^2=x^3$ и прямыми $x=0$, $y=4$.

607. Астроидой $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

608. Одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и осью Ox.

609. Параболой $y=x^2+4x$ и прямой $x-y+4=0$.

610. Цепной линией $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ и прямыми $x=0$, $x=a$.

611. Гиперболой $xy=6$ и прямой $y=7-x$.

612. Кубической параболой $y=x^3$ и прямыми $y=x$, $y=2x$.

613. Окружностью $x^2+y^2=4x$ и параболой $y^2=2x$.

614. Лемнискатой $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$.

615. Первым завитком спирали Архимеда $\rho=a\varphi$ и полярной осью.

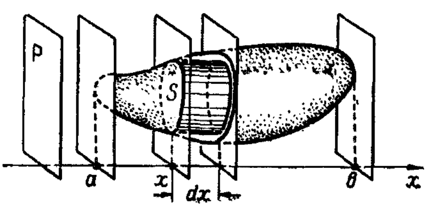
616. Трехлепестковой розой $\rho=a\cos 3\varphi$.

617. Кардиоидой $\rho=a(1-\cos\varphi)$ и окружностью $\rho=a$.

618*. Эллипсами $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$.

§ 4. Объем тела по площадям его параллельных сечений

Если известна площадь $S(x)$ любого сечения тела плоскостью, параллельной некоторой плоскости P, где x—расстояние сечения от плоскости P, черт. 96, то при изменении x на величину dx дифференциал объема тела равен объему прямого цилиндра с высотой dx и площадью основания $S(x)$, т. е. $dv=S(x)\,dx$, а объем всего тела выражается интегралом,



Черт. 96

$$V=\int\limits_a^b S(x)\,dx, \qquad (*)$$

где a и b—левая и правая границы изменения x.