поэтому

$$S_{OCA}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\rho^2\,d\varphi=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin^2\varphi\,d\varphi=a^2\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=a^2\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}=a^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Следовательно, $S=S_{OBA}+S_{OCA}=a^2\left(\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}\right)\approx 0{,}89.$

Найти площадь, ограниченную линиями:

605. Параболой $y=6x-x^2$ и осью Ox.

606. Полукубической параболой $y^2=x^3$ и прямыми $x=0$, $y=4$.

607. Астроидой $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

608. Одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и осью Ox.

609. Параболой $y=x^2+4x$ и прямой $x-y+4=0$.

610. Цепной линией $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ и прямыми $x=0$, $x=a$.

611. Гиперболой $xy=6$ и прямой $y=7-x$.

612. Кубической параболой $y=x^3$ и прямыми $y=x$, $y=2x$.

613. Окружностью $x^2+y^2=4x$ и параболой $y^2=2x$.

614. Лемнискатой $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$.

615. Первым завитком спирали Архимеда $\rho=a\varphi$ и полярной осью.

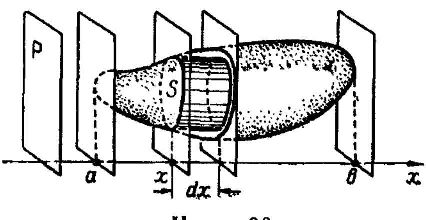
616. Трехлепестковой розой $\rho=a\cos 3\varphi$.

617. Кардиоидой $\rho=a(1-\cos\varphi)$ и окружностью $\rho=a$.

618*. Эллипсами $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$.

§ 4. Объем тела по площадям его параллельных сечений

Если известна площадь $S(x)$ любого сечения тела плоскостью, параллельной некоторой плоскости P, где x — расстояние сечения от плоскости P, черт. 96, то при изменении x на величину dx дифференциал объема тела равен объему прямого цилиндра с высотой dx и площадью основания $S(x)$, т. е. $dv=S(x)\,dx$, а объем всего тела выражается интегралом,



Черт. 96

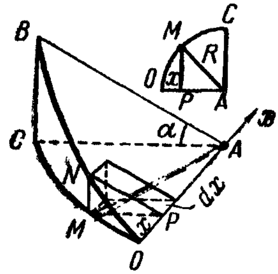
$$V=\int_a^b S(x)\,dx, \qquad (*)$$

где a и b — левая и правая границы изменения x.

619. Найти объем части цилиндра, отсеченной плоскостью, которая проходит через диаметр $2R$ его основания под углом α к плоскости основания.

Решение. Изобразив половину данного тела, черт. 97, замечаем, что всякое сечение его плоскостью, параллельной плоскости ABC, представляет прямоугольный треугольник.

Найдем площадь сечения, отстоящего от точки O на расстоянии $OP=x$. Из прямоугольного треугольника AMP имеем $MP^2=R^2-(R-x)^2$. Из прямоугольного треугольника PNM имеем $MN=MP\operatorname{tg}\alpha$.



Черт. 97

Площадь сечения $S(x)$, как прямоугольного треугольника с катетами MP и MN:

$$S(x)=\frac{1}{2}MP\cdot MN=\frac{1}{2}MP^2\operatorname{tg}\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}[R^2-(R-x)^2]\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}(2Rx-x^2)\operatorname{tg}\alpha.$$

При изменении x на величину dx объем v изменится на величину Δv, эквивалентную объему прямого цилиндра (призмы) с высотой dx и площадью основания $S(x)$:

$$\Delta v\approx dv=S(x)\,dx=\frac{1}{2}(2Rx-x^2)\operatorname{tg}\alpha\,dx.$$

Всему искомому объему соответствует изменение x от 0 до $2R$, поэтому

$$V=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\int\limits_0^{2R}(2Rx-x^2)\,dx=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{2}\left(Rx^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2R}=\frac{2}{3}R^3\operatorname{tg}\alpha.$$

620. Найти объем трехосного эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Решение. Плоское сечение эллипсоида, параллельное плоскости xOz и отстоящее от нее на расстоянии $y=h$, черт. 98, представляет эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2},\qquad \frac{x^2}{a_1^2}+\frac{z^2}{c_1^2}=1,$$

с полуосями

$$a_1=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-h^2}\ \text{ и }\ c_1=\frac{c}{b}\sqrt{b^2-h^2}.$$

Площадь этого сечения, как площадь эллипса, найдем по формуле, полученной в решении задачи 604 (4),

$$S(h)=\pi a_1c_1=\frac{\pi ac}{b^2}(b^2-h^2).$$

Подставляя в формулу (*), получим объем всего эллипсоида

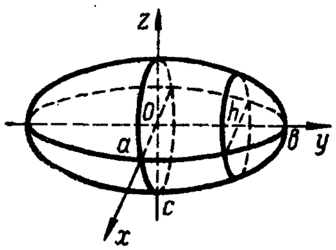
$$V=\frac{2\pi ac}{b^2}\int\limits_0^b (b^2-h^2)\,dh=\frac{2\pi ac}{b^2}\left(b^2h-\frac{h^3}{3}\right)\Bigg|_0^b=\frac{4}{3}\pi abc.$$

При $a=b=c$ полученная формула для объема эллипсоида преобразуется в формулу для объема шара $V=\frac{4}{3}\pi a^3$.

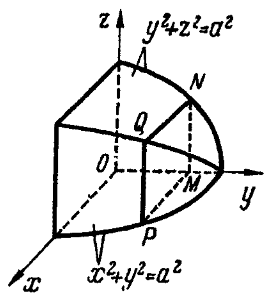
621. Найти объем, общий двум цилиндрам: $x^2+y^2=a^2$ и $y^2+z^2=a^2$ (ограниченный данными цилиндрическими поверхностями).

Решение. Построим восьмую часть тела, расположенную в первом октанте, черт. 99.

Любое сечение тела плоскостью, параллельной плоскости xOz, представляет квадрат. Площадь сечения $PQNM$, отстоящего от



Черт. 98



Черт. 99

плоскости xOz на расстоянии $OM=h$, найдем как площадь квадрата со стороной

$$MP=MN=\sqrt{a^2-h^2};$$
$$S(h)=a^2-h^2,\quad 0\leqslant h\leqslant a.$$

Весь искомый объем, согласно формуле (*), выразится интегралом

$$V=8\int\limits_0^a (a^2-h^2)\,dh=8\left(a^2h-\frac{h^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=\frac{16}{3}a^3.$$

622. Найти объем тела, отсекаемого от эллиптического параболоида $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ плоскостью $z=k$ $(k>0)$.

623. Найти объем, общий двум эллиптическим цилиндрам $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$.

624*. Найти объем тела, ограниченного параболическим цилиндром $z=4-y^2$, плоскостями координат и плоскостью $x=a$.