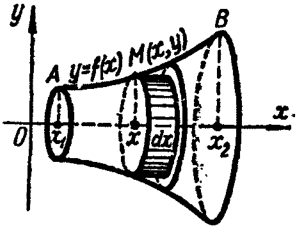
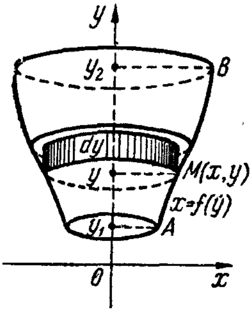
§ 5. Объем тела вращения

Если тело образуется при вращении вокруг оси Ox криволинейной трапеции x_1ABx_2 (черт. 100), то любое его плоское сечение, перпендикулярное к оси Ox, будет круг, радиус которого равен соответствующей ординате кривой $y=f(x)$.

Площадь сечения $S(x)$, соответствующего абсциссе x, как площадь круга, равна πy^2.



Черт. 100



Черт. 101

Дифференциал объема тела, соответствующий приращению dx, будет $dv=\pi y^2dx$, а весь объем тела вращения определяется формулой

$$V=\pi\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx \quad (x_1<x_2). \tag{A}$$

Если тело образуется при вращении вокруг оси Oy криволинейной трапеции y_1ABy_2, прилежащей к оси Oy, черт. 101, то $dv=\pi x^2\,dy$,

$$V=\pi\int_{y_1}^{y_2} x^2\,dy \quad (y_1<y_2). \tag{B}$$

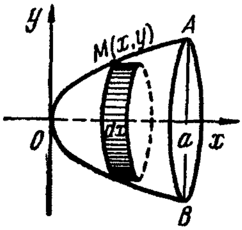
625. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

1) $y^2=2px,\ x=a$ вокруг оси Ox;
2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси Oy;
3) $2y=x^2,\ 2x+2y-3=0$ вокруг оси Ox;
4) $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$ вокруг оси Ox;
5) $y=4-x^2,\ y=0$ вокруг прямой $x=3$.

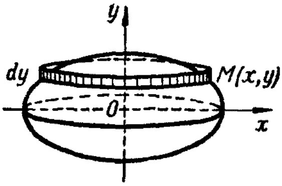
Решение. 1) Построив параболу $y^2=2px$ и прямую $x=a$, получим параболический сегмент OAB, черт. 102. При вращении его вокруг оси Ox образуется сегмент параболоида вращения. Объем этого тела, согласно общим указаниям, найдем по

формуле (А):
$$V=\pi\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx=\pi\int_0^a 2px\,dx=\pi px^2\Big|_0^a=\pi pa^2.$$

2) Если у данного эллипса $b<a$, то при вращении его вокруг малой оси получается сжатый эллипсоид вращения,



Черт. 102

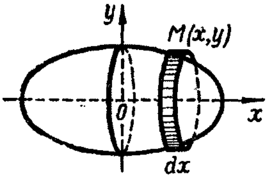


Черт. 103

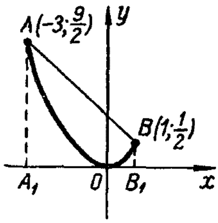
черт. 103. Вычислим объем V_1 этого тела по формуле (В):
$$V_1=\pi\int_{y_1}^{y_2} x^2\,dy=\pi a^2\int_{-b}^{b}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=2\pi a^2\left(y-\frac{y^3}{3b^2}\right)\Big|_0^b=\frac{4}{3}\pi a^2 b.$$

При вращении эллипса вокруг его большой оси получается удлиненный эллипсоид вращения, черт. 104, объем которого $V_2=\frac{4}{3}\pi ab^2$. Очевидно, $V_1>V_2$.

3) Ограниченная данными линиями фигура OAB, черт. 105, при вращении вокруг оси Ox образует тело, объем которого



Черт. 104



Черт. 105

можно найти как разность объемов тел, образованных вращением вокруг оси Ox трапеций A_1ABB_1 и A_1AOBB_1.

Объем V_1, образованный вращением трапеции A_1ABB_1, можно найти по формуле (А):
$$V_1=\pi\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx=\pi\int_{-3}^{1}(1{,}5-x)^2\,dx=$$
$$=\pi\int_{-3}^{1}(x-1{,}5)^2 d(x-1{,}5)=\frac{\pi(x-1{,}5)^3}{3}\Big|_{-3}^{1}=\frac{91}{3}\pi$$

или как объем усеченного конуса по формуле элементарной геометрии.

Объем V_2, образованный вращением криволинейной трапеции A_1AOBB_1, найдем по формуле (A):

$$V_2=\frac{\pi}{4}\int\limits_{-3}^{1}x^4dx=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_{-3}^{1}=\frac{\pi}{20}(1+243)=\frac{61}{5}\pi.$$

Искомый объем $V=V_1-V_2=18\frac{2}{15}\pi$.

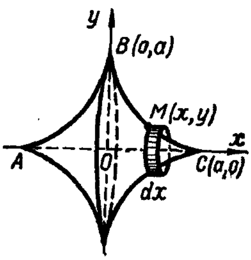
4) Фигура, ограниченная астроидой, черт. 106, при вращении вокруг оси Ox образует тело вращения, объем которого определяется формулой (A):

$$V=\pi\int\limits_{x_1}^{x_2}y^2\,dx=\pi\int\limits_{-a}^{a}y^2\,dx=2\pi\int\limits_{0}^{a}y^2\,dx.$$

Исходя из данных параметрических уравнений астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, преобразуем последний интеграл к переменной t: $y^2=a^2\sin^6 t$; $dx=-3a\cos^2 t\sin t\,dt$;

$t=\frac{\pi}{2}$ при $x=0$; $t=0$ при $x=a$;

$$V=2\pi\int\limits_{0}^{a}y^2\,dx=-6a^3\pi\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^6 t\cos^2 t\sin t\,dt.$$



Черт. 106

Далее тождественио преобразуем подынтегральное выражение и, применяя формулу интегрирования степени, получим

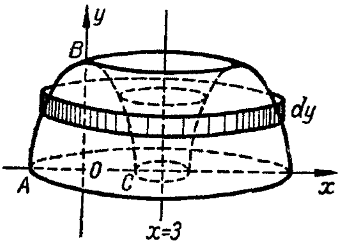
$$V=6a^3\pi\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos^2 t)^3\cos^2 t(-\sin t)\,dt=$$

$$=6a^3\pi\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\cos^2 t-3\cos^4 t+3\cos^6 t-\cos^8 t)\,d\cos t=$$

$$=6a^3\pi\left(\frac{1}{3}\cos^3 t-\frac{3}{5}\cos^5 t+\frac{3}{7}\cos^7 t-\frac{1}{9}\cos^9 t\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0}=\frac{32}{105}\pi a^3.$$

5) Параболический сегмент ABC, ограниченный параболой $y=4-x^2$ и осью Ox, черт. 107, при вращении вокруг прямой $x=3$ образует тело, любое сечение которого плоскостью, перпендикулярной к оси вращения, представляет круговое кольцо,

ограниченное концентрическими окружностями. Площадь такого сечения, отстоящего от начала координат на расстоянии y, $S=\pi R^2-\pi r^2=\pi[(3+x)^2-(3-x)^2]=12\pi x=12\pi\sqrt{4-y}$, так как x есть абсцисса точки, лежащей на данной параболе, т. е. $x=\sqrt{4-y}$.



Черт. 107

При изменении y на величину dy дифференциал объема тела будет $dv=S(y)\,dy=12\pi\sqrt{4-y}\,dy$.

Весь искомый объем получается при изменении y от 0 до 4. Поэтому, интегрируя dv в этих пределах, получим

$$V=12\pi\int_0^4\sqrt{4-y}\,dy=$$

$$=-12\pi\int_0^4(4-y)^{\frac{1}{2}}d(4-y)=8\pi(4-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_4^0=64\pi.$$

Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

626. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $y=0$, $y=b$ вокруг оси Oy.

627. $y=\sin x$ (одной волной), $y=0$ вокруг оси Ox.

628. $y^2+x-4=0$, $x=0$ вокруг оси Oy.

629. $xy=4$, $y=0$, $x=1$, $x=4$ вокруг оси Ox.

630. $y^2=(x+4)^3$, $x=0$ вокруг оси Oy.

631*. $y=x^2$, $y=4$ вокруг прямой $x=-2$.

632. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, $x=0$, $y=0$ вокруг оси Oy.

633*. Найти объем тора, образованного вращением круга $x^2+(y-b)^2\leqslant a^2$ $(a<b)$ вокруг оси Ox.

634. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и осью Ox.

§ 6. Длина дуги плоской кривой

Если плоская кривая отнесена к прямоугольной системе координат и задана уравнением $y=f(x)$, или $x=F(y)$ или параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то дифференциал dl длины ее дуги, черт. 108, выражается формулой

$$dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{1+(x')^2}\,dy=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt,$$