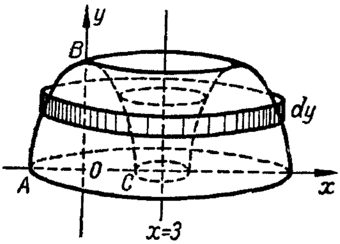
ограниченное концентрическими окружностями. Площадь такого сечения, отстоящего от начала координат на расстоянии y, $S=\pi R^2-\pi r^2=\pi[(3+x)^2-(3-x)^2]=12\pi x=12\pi\sqrt{4-y}$, так как x есть абсцисса точки, лежащей на данной параболе, т. е. $x=\sqrt{4-y}$.



Черт. 107

При изменении y на величину dy дифференциал объема тела будет $dv=S(y)\,dy=12\pi\sqrt{4-y}\,dy$.

Весь искомый объем получается при изменении y от 0 до 4. Поэтому, интегрируя dv в этих пределах, получим

$$V=12\pi\int_0^4\sqrt{4-y}\,dy=$$

$$=-12\pi\int_0^4(4-y)^{\frac{1}{2}}d(4-y)=8\pi(4-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_4^0=64\pi.$$

Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

626. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $y=0$, $y=b$ вокруг оси Oy.

627. $y=\sin x$ (одной волной), $y=0$ вокруг оси Ox.

628. $y^2+x-4=0$, $x=0$ вокруг оси Oy.

629. $xy=4$, $y=0$, $x=1$, $x=4$ вокруг оси Ox.

630. $y^2=(x+4)^3$, $x=0$ вокруг оси Oy.

631*. $y=x^2$, $y=4$ вокруг прямой $x=-2$.

632. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, $x=0$, $y=0$ вокруг оси Oy.

633*. Найти объем тора, образованного вращением круга $x^2+(y-b)^2\leqslant a^2$ $(a<b)$ вокруг оси Ox.

634. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и осью Ox.

§ 6. Длина дуги плоской кривой

Если плоская кривая отнесена к прямоугольной системе координат и задана уравнением $y=f(x)$, или $x=F(y)$ или параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то дифференциал dl длины ее дуги, черт. 108, выражается формулой

$$dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{1+(x')^2}\,dy=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt,$$

а длина дуги AB определяется формулой

$$L_{AB}=\int_{(A)}^{(B)} dl=\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_{y_A}^{y_B}\sqrt{1+(x')^2}\,dy=$$

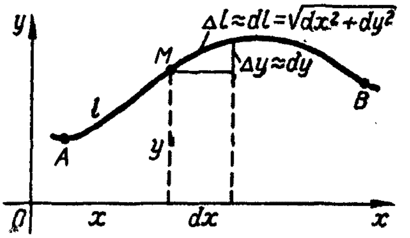
$$=\int_{t_A}^{t_B}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt. \qquad (1)$$

$$(x_A<x_B;\ y_A<y_B;\ t_A<t_B).$$

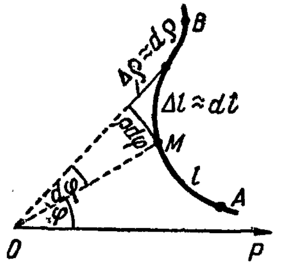
Если плоская кривая отнесена к полярной системе координат и задана уравнением $\rho=f(\varphi)$ (черт. 109), то $dl=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi$,

$$L_{AB}=\int_{(A)}^{(B)} dl=\int_{\varphi_A}^{\varphi_B}\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi.\ (\varphi_A<\varphi_B). \qquad (2)$$

635. Вычислить длину дуги: 1) полукубической параболы $y^2=(x-1)^3$ между точками $A(2;\ -1)$ и $B(5;\ -8)$; 2) одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$; 3) кривой $\rho=a\cos^3\frac{\varphi}{3}$.



Черт. 108



Черт. 109

Решение. 1) Разрешаем данное уравнение относительно y и находим y':

$$y=\pm(x-1)^{\frac{3}{2}};\quad y'=\pm\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}.$$

(Знаки $\pm$ в выражении y указывают, что кривая симметрична оси Ox; точки A и B, имеющие отрицательные ординаты, лежат на той ветви кривой, которая расположена ниже оси Ox.)

Подставляя в формулу (1), получим

$$L_{AB}=\int_{x_A}^{x_B}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_2^5\sqrt{1+\frac{9}{4}(x-1)}\,dx=\frac{1}{2}\int_2^5\sqrt{9x-5}\,dx=$$

$$=\frac{1}{18}\int_2^5(9x-5)^{\frac{1}{2}}\,d(9x-5)=\frac{1}{27}(9x-5)^{\frac{3}{2}}\Big|_2^5\approx 7{,}63.$$

2) Дифференцируем по t параметрические уравнения циклоиды

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t);\quad \dot{y}=\frac{dy}{dt}=a\sin t$$

и находим дифференциал ее дуги

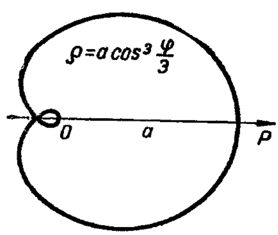
$$dl=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt=\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=$$
$$=a\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=a\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2a\sin\frac{t}{2}dt.$$

Одна арка циклоиды (черт. 83) получается при изменении параметра t от 0 до 2π, поэтому

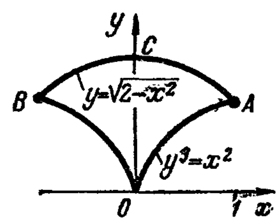
$$L=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=4a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}d\frac{t}{2}=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a.$$

3) Из данного уравнения кривой $\rho=\cos^3\frac{\varphi}{3}$ находим производную $\rho'=\frac{d\rho}{d\varphi}=-a\cos^2\frac{\varphi}{3}\sin\frac{\varphi}{3}$ и дифференциал ее дуги

$$dl=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\,d\varphi=\sqrt{a^2\cos^6\frac{\varphi}{3}+a^2\cos^4\frac{\varphi}{3}\sin^2\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi=a\cos^2\frac{\varphi}{3}d\varphi.$$



Черт. 110



Черт. 111

Половина этой кривой, черт. 110, описывается концом полярного радиуса при изменении φ от 0 до $\frac{3}{2}\pi$. Поэтому согласно формуле (2) длина всей кривой

$$L=2a\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\cos^2\frac{\varphi}{2}d\varphi=a\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\left(1+\cos\frac{2\varphi}{3}\right)d\varphi=$$
$$=a\left(\varphi+\frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\frac{3}{2}\pi}=\frac{3}{2}a\pi.$$

636. Найти периметр фигуры, ограниченной кривыми $y^3=x^2$ и $y=\sqrt{2-x^2}$.

Решение. Совместно решая уравнения кривых, определим две точки их пересечения $A(1;\ 1)$ и $B(-1;\ 1)$. Построив эти точки и проходящие через них данные кривые, получим фигуру, симметричную оси Oy (черт. 111). Периметр этой фигуры $L = 2(L_{\smile OA} + L_{\smile AC})$.

Пользуясь формулой (1), найдем:

$$L_{\smile OA} = \int_{y_O}^{y_A} \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9}{4}y}\,dy =$$

$$= \frac{4}{9}\int_0^1 \left(1+\frac{9}{4}y\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1+\frac{9}{4}y\right) = \frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}y\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{8}{27}\left(\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1\right);$$

$$L_{\smile AC} = \int_{x_C}^{x_A} \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+\frac{x^2}{2-x^2}}\,dx = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} =$$

$$= \sqrt{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

(Это восьмая часть длины окружности, радиус которой $\sqrt{2}$.) Следовательно, искомый периметр фигуры

$$L = 2\left(\frac{13\sqrt{13}-8}{27} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right) \approx 5{,}102.$$

Вычислить длину дуги кривой:

637. $9y^2 = 4(3-x)^3$ между точками пересечения с осью Oy.

638. Астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

639. Цепной линии $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ между прямыми $x = -a$ и $x = 0$.

640. $2y = x^2 - 2$ между точками пересечения с осью Ox.

641*. $y = \ln x$ между прямыми $x = \sqrt{3}$ и $x = \sqrt{8}$.

642. Кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

643. Первого завитка спирали Архимеда $\rho = a\varphi$.

644*. Эволюты эллипса $x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t$.

645. Найти периметр фигуры, ограниченной линиями:
1) $x^2 = (y+1)^3$ и $y = 4$; 2) $y^2 = 2px$ и $2x = p$.

§ 7. Площадь поверхности вращения

Если поверхность образуется при вращении дуги AM плоской кривой вокруг оси Ox (черт. 112), то дифференциал площади этой поверхности равен площади боковой поверхности усеченного