метричную оси Oy (черт. 111). Периметр этой фигуры $L = 2(L_{\smile OA} + L_{\smile AC})$.

Пользуясь формулой (1), найдем:

$$L_{\smile OA} = \int_{y_O}^{y_A} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4} y}\, dy =$$

$$= \frac{4}{9}\int_0^1 \left(1 + \frac{9}{4} y\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1 + \frac{9}{4} y\right) = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4} y\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{8}{27}\left(\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1\right);$$

$$L_{\smile AC} = \int_{x_C}^{x_A} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{2 - x^2}}\, dx = \sqrt{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}} =$$

$$= \sqrt{2} \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

(Это восьмая часть длины окружности, радиус которой $\sqrt{2}$.)

Следовательно, искомый периметр фигуры

$$L = 2\left(\frac{13\sqrt{13} - 8}{27} + \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right) \approx 5{,}102.$$

Вычислить длину дуги кривой:

637. $9y^2 = 4(3 - x)^3$ между точками пересечения с осью Oy.

638. Астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

639. Цепной линии $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ между прямыми $x = -a$ и $x = 0$.

640. $2y = x^2 - 2$ между точками пересечения с осью Ox.

641*. $y = \ln x$ между прямыми $x = \sqrt{3}$ и $x = \sqrt{8}$.

642. Кардиоиды $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

643. Первого завитка спирали Архимеда $\rho = a\varphi$.

644*. Эволюты эллипса $x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t$, $y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t$.

645. Найти периметр фигуры, ограниченной линиями:
1) $x^2 = (y + 1)^3$ и $y = 4$; 2) $y^2 = 2px$ и $2x = p$.

§ 7. Площадь поверхности вращения

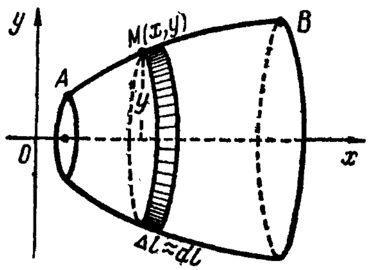
Если поверхность образуется при вращении дуги AM плоской кривой вокруг оси Ox (черт. 112), то дифференциал площади этой поверхности равен площади боковой поверхности усеченного круглого конуса с образующей dl и радиусами оснований y и $y+dy$:

$$ds = \frac{2\pi y + 2\pi(y+dy)}{2}\,dl = \pi(2y+dy)\,dl \approx 2\pi y\,dl,$$

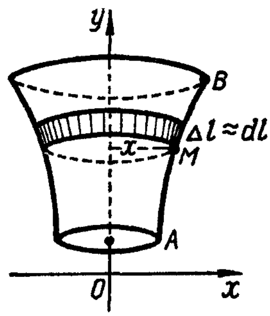
а площадь поверхности, образованной вращением дуги AB, определяется формулой

$$S = \int\limits_{(A)}^{(B)} ds = 2\pi \int\limits_{(A)}^{(B)} y\,dl, \qquad (1)$$

где (A) и (B) обозначают значения в точках A и B выбранной переменной интегрирования, dl—дифференциал дуги кривой.



Черт. 112

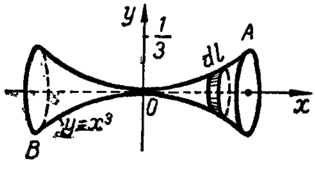


Черт. 113

При вращении дуги AB кривой вокруг оси Oy (черт. 113)

$$ds \approx 2\pi x\,dl; \quad S = \int\limits_{(A)}^{(B)} ds = 2\pi \int\limits_{(A)}^{(B)} x\,dl. \qquad (2)$$

646. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox: 1) дуги кубической параболы $y = x^3$, заключенной между прямыми $x = -\frac{2}{3}$ и $x = \frac{2}{3}$; 2) астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$; 3) эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$.



Черт. 114

Решение. 1) Построив дугу параболы между точками $A\left(\frac{2}{3};\ \frac{8}{27}\right)$ и $B\left(-\frac{2}{3};\ -\frac{8}{27}\right)$ (черт. 114), замечаем, что поверхность, образуемая вращением этой дуги вокруг оси Ox, состоит из двух одинаковых частей. Поэтому и согласно формуле (1), имеем

$$S = 2\cdot 2\pi \int\limits_0^{\frac{2}{3}} y\sqrt{1+(y')^2}\,dx = 4\pi \int\limits_0^{\frac{2}{3}} x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx.$$

Для вычисления интеграла полагаем $1+9x^4=$ тогда $36x^3\,dx=dz$; $z_1=1$ при $x=0$; $z_2=\frac{25}{9}$ при $x=$

$$S=4\pi\int_1^{\frac{25}{9}}\sqrt{t}\,\frac{dt}{36}=\frac{\pi}{9}\int_1^{\frac{25}{9}}t^{\frac{1}{2}}\,dt=\frac{\pi}{9}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big|_1^{\frac{25}{9}}=\frac{2\pi}{27}\left(\frac{125}{27}-1\right)\approx 0{,}845.$$

2) Применяя формулу (1), преобразуя ее к переменной t, исходя из уравнений астроиды, получим

$$S=2\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}y\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=$$

$$=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\sin^3 t\sqrt{(-3a\cos^2 t\sin t)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2}\,dt=$$

$$=12a^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos t\,dt=12a^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,d\sin t=$$

$$=\frac{12}{5}a^2\pi\sin^5 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{12}{5}\pi a^2.$$

(Четвертая часть астроиды, расположенная в первом квадранте (черт. 106) получается при изменении t от 0 до $\frac{\pi}{2}$.)

3) Дифференцируя по x обе части уравнения эллипса $\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0$, $yy'=-\frac{b^2x}{a^2}$ и подставляя в формулу (1), находим

$$S=2\pi\int_{-a}^{a}y\sqrt{1+(y')^2}\,dx=4\pi\int_0^a\sqrt{y^2+(yy')^2}\,dx=$$

$$=4\pi\int_0^a\sqrt{b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}+\frac{b^4x^2}{a^4}}\,dx=\frac{4\pi b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}\,dx=$$

$$=\frac{4\pi b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-\varepsilon^2x^2}\,dx,$$

где $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{c}{a}$ — эксцентриситет эллипса.

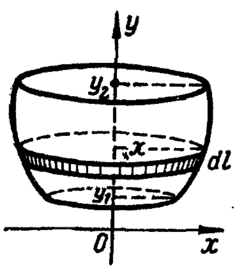
Полагая $\varepsilon x = a \sin t$, получим $\varepsilon\, dx = a \cos t\, dt$; $t_1 = 0$ при $x = 0$; $t_2 = \arcsin \varepsilon$ при $x = a$;

$$S = \frac{4\pi b}{a} \int_0^{t_2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}\, \frac{a}{\varepsilon} \cos t\, dt = \frac{4\pi ab}{\varepsilon} \int_0^{t_2} \cos^2 t\, dt =$$

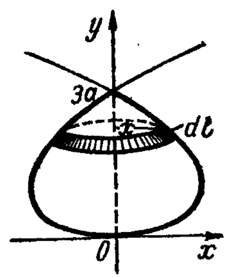
$$= \frac{2\pi ab}{\varepsilon} \int_0^{t_2} (1 + \cos 2t)\, dt = \frac{2\pi ab}{\varepsilon} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Bigg|_0^{t_2} = 2\pi b \left(b + \frac{a}{\varepsilon} \arcsin \varepsilon \right).$$

Отсюда при $\varepsilon \to 0$ получается площадь поверхности шара $S = 4\pi a^2$.

647. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy: 1) дуги окружности $x^2 + (y-b)^2 = R^2$ между ее точками, где $y = y_1$ и $y = y_2$; 2) петли кривой $9ax^2 = y(3a-y)^2$.



Черт. 115



Черт. 116

Решение. 1) Если дуга данной окружности не пересекает оси Oy (своего диаметра), то при вращении ее вокруг этой оси образуется поверхность, называемая сферическим поясом (черт. 115). Дифференцируя по y обе части уравнения окружности $2xx' + 2(y-b) = 0$, $xx' = -(y-b)$ и подставляя в формулу (2), получим

$$S = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} x \sqrt{1 + (x')^2}\, dy = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{x^2 + (xx')^2}\, dy =$$

$$= 2\pi \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{R^2 - (y-b)^2 + (y-b)^2}\, dy =$$

$$= 2\pi R \int_{y_1}^{y_2} dy = 2\pi R (y_2 - y_1) = 2\pi RH,$$

где H — высота пояса. При $H = 2R$ получим формулу площади сферы $S = 4\pi R^2$.

2) Петля данной кривой (черт. 116) описывается текущей точкой при изменении y от 0 до $3a$. Поэтому, дифференцируя по y

обе части ее уравнения: $18axx' = (3a-y)^2 - 2y(3a-y) = 3(3a-y)(a-y)$, $xx' = \frac{(3a-y)(a-y)}{6a}$ и подставляя в формулу (2), получим

$$S = 2\pi \int_0^{3a} \sqrt{x^2 + (xx')^2}\, dy = 2\pi \int_0^{3a} \sqrt{\frac{y(3a-y)^2}{9a} + \frac{(3a-y)^2(a-y)^2}{36a^2}}\, dy =$$

$$= 2\pi \int_0^{3a} \frac{3a-y}{6a} \sqrt{a^2 + 2ay + y^2}\, dy = \frac{\pi}{3a} \int_0^{3a} (3a^2 + 2ay - y^2)\, dy = 3\pi a^2.$$

Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox:

648. Окружности $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

649. Дуги параболы $y^2 = 2x$ между точками пересечения с прямой $2x = 3$.

650. Одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

651. Одной волны синусоиды $y = \sin x$.

Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy:

652. Дуги полукубической параболы $x = 4 - \frac{t^2}{2}$, $y = \frac{t^3}{3}$ между точками пересечения с осями координат.

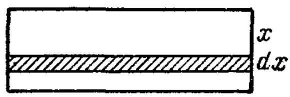
653. Эллипса $3x^2 + 4y^2 = 12$.

654. Найти площадь поверхности тора, образованного вращением окружности $x^2 + y^2 = a^2$ вокруг прямой $y = b$, $b > a$.

§ 8. Физические задачи

655. Определить давление воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 18 *м* и высотой 6 *м*.

Решение. Величина p давления жидкости на горизонтальную площадку зависит от глубины ее погружения x, т. е. от расстояния площадки до поверхности жидкости: $p = \delta a x$; δ — удельный вес жидкости, a — площадь площадки.



Черт. 117

Руководствуясь общей схемой (II) применения определенного интеграла к вычислению величин, разделим шлюз на глубине x горизонтальной прямой (черт. 117). Тогда давление воды на верхнюю часть шлюза будет некоторой функцией $p(x)$. Найдем дифференциал dp этой функции, т. е. приближенную величину (главную часть) ее приращения Δp при изменении глубины x на малую величину dx.

Допустим, ввиду малости dx, что все точки заштрихованной полоски находятся на глубине x, т. е. что она расположена на