обе части ее уравнения: $18axx' = (3a-y)^2 - 2y(3a-y) = 3(3a-y)(a-y)$, $xx' = \frac{(3a-y)(a-y)}{6a}$ и подставляя в формулу (2), получим

$$S = 2\pi \int_0^{3a} \sqrt{x^2 + (xx')^2}\, dy = 2\pi \int_0^{3a} \sqrt{\frac{y(3a-y)^2}{9a} + \frac{(3a-y)^2(a-y)^2}{36a^2}}\, dy =$$

$$= 2\pi \int_0^{3a} \frac{3a-y}{6a} \sqrt{a^2 + 2ay + y^2}\, dy = \frac{\pi}{3a} \int_0^{3a} (3a^2 + 2ay - y^2)\, dy = 3\pi a^2.$$

Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси $Ox$:

**648.** Окружности $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

**649.** Дуги параболы $y^2 = 2x$ между точками пересечения с прямой $2x = 3$.

**650.** Одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

**651.** Одной волны синусоиды $y = \sin x$.

Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси $Oy$:

**652.** Дуги полукубической параболы $x = 4 - \frac{t^2}{2}$, $y = \frac{t^3}{3}$ между точками пересечения с осями координат.

**653.** Эллипса $3x^2 + 4y^2 = 12$.

**654.** Найти площадь поверхности тора, образованного вращением окружности $x^2 + y^2 = a^2$ вокруг прямой $y = b$, $b > a$.

## § 8. Физические задачи

**655.** Определить давление воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 18 *м* и высотой 6 *м*.

Решение. Величина $p$ давления жидкости на горизонтальную площадку зависит от глубины ее погружения $x$, т. е. от расстояния площадки до поверхности жидкости: $p = \delta a x$; $\delta$ — удельный вес жидкости, $a$ — площадь площадки.


Черт. 117

Руководствуясь общей схемой (II) применения определенного интеграла к вычислению величин, разделим шлюз на глубине $x$ горизонтальной прямой (черт. 117). Тогда давление воды на верхнюю часть шлюза будет некоторой функцией $p(x)$. Найдем дифференциал $dp$ этой функции, т. е. приближенную величину (главную часть) ее приращения $\Delta p$ при изменении глубины $x$ на малую величину $dx$.

Допустим, ввиду малости $dx$, что все точки заштрихованной полоски находятся на глубине $x$, т. е. что она расположена на глубине $x$ в горизонтальной плоскости. Тогда приближеная величина давления воды на эту полоску будет равна весу столба воды, имеющего основанием эту полоску, и высотой — глубину $x$:

$\Delta p \approx dp = 18\delta x\,dx = 18x\,dx$. (Удельный вес воды $\delta = 1$*.)

Согласно условию задачи глубина $x$ изменяется на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 6$. Поэтому искомое давление $P$ на весь шлюз найдем, интегрируя $dp$ в пределах от 0 до 6:

$$P = 18\int_0^6 x\,dx = 9x^2\Big|_0^6 = 324T \approx 324000 \cdot 9{,}81\,н \approx 3178440\,н^{**} \approx 3{,}18\,Мн.$$

**656.** При условиях предыдущей задачи найти, на какой глубине $x = c$ надо разделить шлюз горизонтальной прямой, чтобы давление воды на верхнюю и нижнюю части шлюза было одинаково.

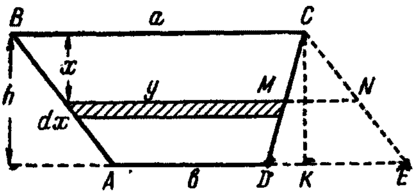
Решение. Определим давление воды на каждую часть шлюза, интегрируя $dp$ в пределах от 0 до $c$ и в пределах от $c$ до 6, затем приравниваем интегралы друг другу:

$$18\int_0^c x\,dx = 18\int_c^6 x\,dx; \qquad x^2\Big|_0^c = x^2\Big|_c^6; \quad c^2 = 36 - c^2.$$

Решая полученное уравнение, найдем $c = 3\sqrt{2} \approx 4{,}23$ *м*.

**657.** Определить давление воды на вертикальную плотину, имеющую форму трапеции, размеры которой указаны на черт. 118.

Решение. Допуская, что заштрихованная полоска расположена на глубине $x$ в горизоитальной плоскости и что она является прямоугольником со сторонами $y$ и $dx$, найдем приближенную величину давления воды на эту полоску $\Delta p \approx xy\,dx = dp$ и затем давление воды на всю плотину:




Черт. 118

$$P = \int_0^h xy\,dx.$$

Для вычисления интеграла выразим переменную $y$ через переменную $x$. Проведя вспомогательную прямую $CE$ параллельно $BA$, из подобия треугольников $DCE$ и $MCN$ имеем пропорцию

$$(a-b):(a-y) = h:x,$$

из которой находим $y = a - \frac{x}{h}(a-b)$.

---

* Здесь и далее удельный вес задается в $Г/см^3$.

** *н (ньютон)* — единица силы (веса) в Международной системе единиц СИ; $1\,н \approx 0{,}102\,кГ$; $1\,кГ \approx 9{,}81\,н$.

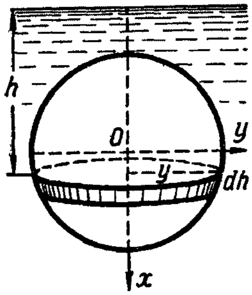
Подставляя в подынтегральное выражение и интегрируя, получим

$$P=\int_0^h x\left[a-\frac{x}{h}(a-b)\right]dx=a\int x\,dx-\frac{a-b}{h}\int x^2\,dx\,\Big|_0^h=\frac{h^2(a+2b)}{6}.$$

**658.** Найти давление воды на поверхность шара диаметром 4 *м*, если его центр находится на глубине 3 *м* от поверхности воды.

Решение. Проведем через центр шара вертикальную плоскость и выберем на ней прямоугольную систему координат $xOy$, как показано на черт. 119.

Рассечем шар на глубине $h$ горизонтальной плоскостью. Тогда давление воды на отсеченную часть поверхности шара будет некоторой функцией $p(h)$.



Черт. 119

При изменении $h$ на величину $dh$ площадь $S$ отсеченной части поверхности шара, как площадь поверхности вращения вокруг оси $Ox$, изменится на величину $\Delta s\approx 2\pi y\,dl=ds$, где $dl$ — дифференциал дуги окружности, а давление $p(h)$ изменится на величину $\Delta p\approx 2\pi\,hy\,dl=dp$.

Выразив $dp$ через одну переменную $x$ и интегрируя в пределах от $x=-2$ до $x=2$, найдем давление воды на всю поверхность шара. Из уравнения окружности $x^2+y^2=4$ найдем

$y'=-\frac{x}{y}$ и затем $dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\,dx=\frac{2}{y}\,dx$; из чертежа находим $h=3+x$. Следовательно,

$$P=2\pi\int_{-2}^{2}(3+x)\,y\,\frac{2}{y}\,dx=4\pi\int_{-2}^{2}(3+x)\,dx=2\pi(3+x)^2\Big|_{-2}^{2}=$$

$$=48\pi(T)\approx 470880\pi(н)\approx 0{,}471\pi(Мн).$$

Давление на верхнюю половину поверхности шара получим, интегрируя $dp$ в пределах от $-2$ до 0:

$$P_1=2\pi(3+x)^2\Big|_{-2}^{0}=16\pi\,(T)\approx 156960\pi(н)\approx 0{,}157\pi(Мн).$$

Давление на нижнюю половину поверхности шара будет

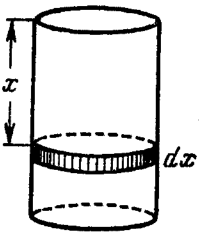
$$P_2=2\pi(3+x)^2\Big|_{0}^{2}=32\pi\,(T)\approx 313920\pi(н)\approx 0{,}314\pi(Мн).$$

**659.** Вычислить работу, необходимую для выкачивания масла из вертикального цилиндрического резервуара высотой $H=6$ *м* и радиусом основания $R=2$ *м*. Удельный вес масла $\delta=0{,}9$.

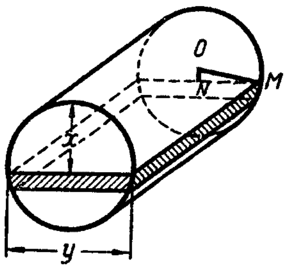
Решение. Величина работы $q$, затрачиваемой на поднятие некоторого тела, зависит от высоты $x$ его подъема: $q=Px$, $P$ — вес тела.

Допустим, что работа, затраченная на выкачивание из резервуара слоя масла толщиною $x$, черт. 120, есть некоторая функция $q(x)$ и найдем дифференциал этой функции.

При увеличении $x$ на величину $dx$ объем $v$ слоя масла увеличится на величину $\Delta v=\pi R^2\,dx$, его вес $p$ увеличится на вели-




Черт. 120




Черт. 121

чину $\Delta p=\pi\delta R^2\,dx$, а затраченная работа $q$ увеличится на величину $\Delta q\approx\pi\delta R^2\,x\,dx=dq$.

Всю искомую работу $Q$ получим при изменении $x$ от 0 до $H$. Поэтому

$$Q=\pi\delta R^2\int_0^H x\,dx=\pi\delta R^2\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^H=\frac{\pi\delta R^2H^2}{2}\approx 64800\pi\,(\textit{кГм})\approx$$

$$\approx 64800\cdot 9{,}81\pi\,(\textit{дж})\approx 635688\pi\,(\textit{дж}).^*$$

**660.** При условиях предыдущей задачи вычислить работу, необходимую для выкачивания масла из цилиндрического резервуара, если его ось имеет горизонтальное направление.

Решение. Как и в решении предыдущей задачи, полагаем, что работа, затрачиваемая на выкачивание из резервуара слоя масла толщиною $x$ (черт. 121), есть некоторая функция $q(x)$ и найдем дифференциал этой функции.

При увеличении $x$ на величину $dx$ объем $v$ слоя масла увеличится на величину $\Delta v\approx H\,y\,dx=dv$, его вес $p$ увеличится на величину $\Delta p\approx\delta\,Hy\,dx=dp$, а затраченная работа $q$ увеличится на величину $\Delta q\approx\delta\,Hyx\,dx=dq$.

Вся искомая работа $Q$ выразится интегралом от $dq$ в пре-

---

* *дж* (*джоуль*) — единица работы в Международной системе единиц СИ; 1 *дж* $\approx 0{,}102$ *кГм*; 1 *кГм* $\approx 9{,}81$ *дж*.

делах от $x=0$ до $x=2R$:

$$Q=\delta H\int\limits_0^{2R} xy\,dx=2\delta H\int\limits_0^{2R} x\sqrt{R^2-(x-R)^2}\,dx,$$

где переменная $y$ выражена через перемеиную $x$ из прямоугольного треугольника $ONM$.

Для вычисления этого интеграла полагаем $x-R=R\sin t$. Тогда $dx=R\cos t\,dt$; $t=-\frac{\pi}{2}$ при $x=0$; $t=\frac{\pi}{2}$ при $x=R$;

$$Q=2\delta H\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(R+R\sin t)R^2\cos^2 t\,dt=2\delta HR^3\left(\int\cos^2 t\,dt+\right.$$

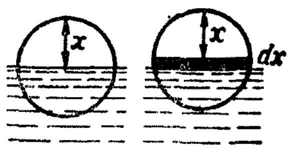
$$\left.+\int\cos^2 t\sin t\,dt\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\delta HR^3\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t-\frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\pi\delta HR^3=43200\pi\ (кГм)\approx 423792\pi\ (дж).$$

**661.** Шар лежит на дне бассейна глубиной $H=14$ *дм*. Определить работу, необходимую для извлечения шара из воды, если его радиус $R=3$ *дм*, а удельный вес $\delta=2$.

Решение. При подъеме шара до поверхности воды сила $P_1$, совершающая работу, постоянна и равна разности между весом шара и весом вытесняемой им воды:

$$P_1=\frac{4}{3}\pi R^3\delta-\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi R^3(\delta-1).$$




Черт. 122

Поэтому работа $Q_1$, необходимая для поднятия шара до поверхности воды, определяется элементарным путем как произведение силы $P_1$ на высоту подъема $H-2R$:

$$Q_1=P_1(H-2R)=\frac{4}{3}\pi R^3(\delta-1)(H-2R).$$

При дальнейшем подъеме шара сила $p$, совершающая работу, будет изменяться в зависимости от высоты $x$ надводной части шара (черт. 122):

$$p(x)=P_ш-p_в,$$

где $P_ш$ — вес шара, $p_в$ — вес воды, вытесияемой подводной частью шара, численно равный объему шарового сегмента с высотой $h=2R-x$:

$$p_в=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)=\frac{\pi}{3}(2R-x)^2(R+x)=\frac{\pi}{3}(x^3-3Rx^2+4R^3).$$

Очевидно, и работа, совершаемая силой $p(x)$, будет некоторой функцией $q(x)$. Допуская, что при подъеме шара еще на малую высоту $dx$ сила $p(x)$ остается неизменной, найдем приближенную величину приращения работы

$$\Delta q \approx p(x)\,dx = (P_ш - p_в)\,dx = \frac{\pi}{3}\left[4R^3(\delta-1) - x^3 + 3Rx^2\right]dx = dq.$$

Интегрируя $dq$ в пределах от $x=0$ до $x=2R$, найдем работу $Q_2$, которую надо совершить, чтобы шар, поднятый со дна бассейна до поверхности воды, полностью извлечь из воды:

$$Q_2 = \frac{\pi}{3}\int_0^{2R}\left[4R^3(\delta-1) - x^3 + 3Rx^2\right]dx =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[4R^3(\delta-1)\,x - \frac{x^4}{4} + Rx^3\right]\Bigg|_0^{2R} = \frac{4}{3}\pi R^4(2\delta-1).$$

Вся искомая работа $Q = Q_1 + Q_2 = \frac{4}{3}\pi R^3\left[R + (\delta-1)H\right] = 61{,}2\pi$ (*кГм*) $\approx 600{,}4\pi$ (*дж*).

**662.** Определить работу, необходимую для запуска ракеты весом $P = 1{,}5$ *Т* с поверхности земли на высоту $H = 2000$ *км*.

Решение. Сила $F$ притяжения тела землей или вес тела зависит от его расстояния $x$ до центра земли: $F(x) = \frac{\lambda}{x^2}$, где $\lambda$ — постоянная.

Если $P$ есть вес тела, когда оно находится на поверхности земли, т. е. на расстоянии земного радиуса $R$ от центра земли, то $P = \frac{\lambda}{R^2}$, $\lambda = PR^2$ и сила $F$, преодолеваемая двигателем поднимающейся ракеты в момент, когда она находится на расстоянии $x$ от центра земли, является известной функцией от $x$:

$$F(x) = \frac{PR^2}{x^2}.$$

Полагая, что работа, совершаемая двигателем ракеты при подъеме ее на высоту $x$, есть некоторая функция $q(x)$ и допуская, что при дальнейшем подъеме ракеты на малую высоту $dx$ сила $F$ остается неизменной, найдем приближенную величину приращения работы

$$\Delta q \approx F(x)\,dx = \frac{PR^2}{x^2}\,dx = dq.$$

При подъеме ракеты с поверхности земли на высоту $H$ переменная $x$ изменяется от $R$ до $R+H$. Поэтому искомая работа $Q$ выражается интегралом

$$Q = \int_R^{R+H} F(x)\,dx = PR^2\int_R^{R+H}\frac{dx}{x^2} = PR^2\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_R^{R+H} = \frac{PRH}{R+H}.$$

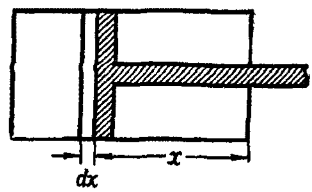
При $P=1{,}5T$, $H=2000$ *км*, $R=6400$ *км* $Q\approx 2{,}285714{,}000$ *кГм* $\approx$
$\approx 22\,422\,854\,340$ *дж*.

Работу, которую должен совершить двигатель, чтобы полностью освободить ракету от земного притяжения, можно определить как предел работы $Q(H)$ при неограниченном возрастании $H$:

$$\lim_{H\to\infty} Q(H)=\lim\frac{PRH}{R+H}=\lim\left[PR:\left(\frac{R}{H}+1\right)\right]=PR.$$

При указанных значениях $P$ и $R$ эта работа составит $9\,600\,000\,000$ *кГм* $\approx 94176\,000\,000$ *дж*.

**663.** Цилиндр высотой $H=1{,}5$ *м* и радиусом $R=0{,}4$ *м*, наполненный газом под атмосферным давлением ($10\,330$ *кГ/м*$^2$), закрыт поршнем. Определить работу, затрачиваемую на изотермическое сжатие газа при перемещении поршня на расстояние $h=1{,}2$ *м* внутрь цилиндра.



Черт. 123

Решение. При изотермическом изменении состояния газа, когда его температура остается неизменной, зависимость между объемом $v$ и давлением $p$ газа выражается формулой $pv=c=\text{const}$. (Закон Бойля — Мариотта.)

Поэтому, если поршень будет вдвинут на $x$ *м* внутрь цилиндра (черт. 123), то давление $p(x)$ газа на единицу площади поршня будет $p(x)=\frac{c}{v(x)}=\frac{c}{S\,(H-x)}$, а давление на всю площадь $S$ поршня будет $P(x)=Sp(x)=\frac{c}{H-x}$.

Полагая, что работа, затрачиваемая при вдвижении поршня на $x$ *м*, есть некоторая функция $q(x)$, и допуская, что при дальнейшем вдвижении поршня на малое расстояние $dx$ испытываемое им давление $P(x)$ остается неизменным, найдем приближенную величину приращения (дифференциал) функции $q(x)$:

$$\Delta q\approx P(x)\,dx=\frac{c}{H-x}\,dx=dq.$$

Всей искомой работе $Q$ соответствует изменение $x$ от 0 до $h$, поэтому

$$Q=c\int_0^h\frac{dx}{H-x}=-c\ln(H-x)\Big|_0^h=c\ln\frac{H}{H-h}.$$

При $H=1{,}5$ *м*, $R=0{,}4$ *м*, $h=1{,}2$ *м*, $p_0=10\,330$ *кГ/м*$^2$ найдем $v_0=\pi R^2H=0{,}24\pi$ *м*$^3$; $c=p_0v_0=2479{,}2\pi$; $Q\approx 12533{,}3$ *кГм* $\approx$
$\approx 122951{,}7$ *дж*.

**664.** При условиях предыдущей задачи определить работу адиабатического сжатия газа *, при котором его объем $v$ и давление $p$ связаны соотношением $pv^k = c = \text{const}$ (закон Пуассона), где $k$ — постоянная для данного газа величина, большая единицы. (Для воздуха $k \approx 1{,}4$.)

Решение. Повторяя те же рассуждения и употребляя те же обозначения, как и в решении предыдущей задачи, найдем следующее выражение для дифференциала работы:

$$dq(x) = \frac{c\,dx}{S^{k-1}(H-x)^k}.$$

Интегрируя в пределах от $x=0$ до $x=h$, получим всю искомую работу

$$Q = \frac{c}{S^{k-1}} \int_0^h \frac{dx}{(H-x)^k} = \frac{c}{S^{k-1}} \int_h^0 (H-x)^{-k}\,d(H-x) =$$

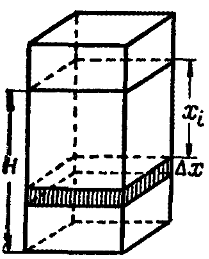
$$= \frac{c}{S^{k-1}} \frac{(H-x)^{1-k}}{1-k}\Bigg|_h^0 = \frac{p_0 v_0^k}{S^{k-1}(k-1)}\left[\frac{1}{(H-h)^{k-1}} - \frac{1}{H^{k-1}}\right] =$$

$$= \frac{p_0 v_0}{k-1}\left[\left(\frac{H}{H-h}\right)^{k-1} - 1\right].$$

Полагая $H = 1{,}5$ *м*, $k = 1{,}4$, найдем

$$Q \approx \frac{2479{,}2\pi}{0{,}4}\left[\left(\frac{1{,}5}{0{,}3}\right)^{0{,}4} - 1\right] \approx 17593{,}4 \text{ кГм} \approx 172591{,}3 \text{ дж}.$$

Сравнение этого результата с предыдущими показывает, что работа, затрачиваемая при адиабатическом сжатии газа, больше, чем при изотермическом.



Черт. 124

**665.** Прямоугольный резервуар с площадью горизонтального сечения $S = 6$ *м*$^2$ наполнен водой до высоты $H = 5$ *м*. Определить время, в течение которого вся вода вытечет из резервуара через небольшое отверстие в его дне площадью $s = 0{,}01$ *м*$^2$, если принять, что скорость истечения воды равна $0{,}6\sqrt{2gh}$, где $h$ — высота уровня воды над отверстием, $g$ — ускорение силы тяжести.

Решение. Согласно общей схеме (I) разобьем искомое время $T$ на большое число $n$ малых промежутков $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_n$, и пусть за каждый такой промежуток уровень воды в резервуаре понижается на величину $\Delta x = \frac{H}{n}$ (черт. 124).

---

* В адиабатическом процессе температура газа меняется: при увеличении объема она понижается, а при уменьшении объема повышается.

Если допустить, что в течение каждого малого промежутка времени $\Delta t_i$ скорость истечения воды через отверстие в дне остается постоянной, равной ее значению в начале промежутка $0{,}6\sqrt{2g(H-x_i)}$, то, приравняв объем воды, вытекшей с такой скоростью через отверстие в дне за промежуток $\Delta t_i$, объему опорожнившейся за этот же промежуток части резервуара, получим приближенное равенство

$$0{,}6s\sqrt{2g(H-x_i)}\,\Delta t_i \approx S\Delta x,$$

откуда

$$\Delta t_i \approx \frac{S\,\Delta x}{0{,}6s\sqrt{2g(H-x_i)}}.$$

Приближенное значение всего искомого времени $T$ будет равно сумме

$$T=\sum_{i=1}^{n}\Delta t_i \approx \sum_{i=1}^{n}\frac{S\,\Delta x}{0{,}6s\sqrt{2g(H-x_i)}}, \qquad (*)$$

где по условию задачи точки $x_i$ заключены на отрезке $[0,\ H]$.

Убедившись, что с возрастанием $n$ погрешность полученного приближенного значения $T$ стремится к нулю, найдем точное значение $T$ как предел интегральной суммы $(*)$ при $n\to+\infty$, т. е. как соответствующий определенный интеграл

$$T=\frac{S}{0{,}6s\sqrt{2g}}\int_0^H (H-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx=\frac{2S}{0{,}6s\sqrt{2g}}(H-x)^{\frac{1}{2}}\Big|_H^0=\frac{S}{0{,}6s}\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Подставляя числовые значения параметров, получим $T\approx$ $\approx 1010$ *сек* $\approx 16{,}83$ *мин*.

Если бы убыль воды в резервуаре постоянно возмещалась, т. е. если бы уровень воды в нем оставался неизменным, то и скорость истечения воды была бы постоянной, равной $0{,}6\sqrt{2gH}$. В этом случае в каждую секунду через отверстие в дне резервуара будет вытекать объем воды $0{,}6s\sqrt{2gH}$, равный объему прямого цилиндра с площадью основания $s$ и высотой $0{,}6\sqrt{2gH}$. Поэтому при указанном предположении объем воды, вмещающейся в резервуаре, вытечет из него за время

$$T_1=\frac{SH}{0{,}6s\sqrt{2gH}}=\frac{1}{2}\,\frac{S}{0{,}6s}\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Сопоставление этого результата с предыдущим показывает, что время истечения $T$, без возмещения убыли воды в резервуаре, в два раза больше времени истечения $T_1$, при постоянном возмещении убыли воды; $T=2T_1$.

**666.** При условиях предыдущей задачи определить, за какое время уровень воды в резервуаре изменится на $h$ *м*, если сверху в него непрерывно будет протекать $V$ *м*$^3$ воды в секунду?

Решение. В этом случае за малый промежуток времени $\Delta t$ объем воды в резервуаре изменится на величину

$$S\,\Delta x \approx [0{,}6s\sqrt{2g(H-x)}-V]\,\Delta t,$$

откуда

$$\Delta t \approx \frac{S\,\Delta x}{0{,}6s\sqrt{2g(H-x)}-V}=dt.$$

Интегрируя $dt$ в пределах от $x=0$ до $x=h$, найдем искомое время $T_2$, за которое уровень воды в резервуаре изменится на $h$ (*м*):

$$T_2=a\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{H-x}-b},$$

где

$$a=\frac{S}{0{,}6s\sqrt{2g}},\qquad b=\frac{V}{0{,}6s\sqrt{2g}}.$$

Применяя подстановку $\sqrt{H-x}=z$, получим $dx=-2z\,dz$; $z_1=\sqrt{H}$ при $x=0$; $z_2=\sqrt{H-h}$ при $x=h$;

$$T_2=a\int_{z_1}^{z_2}\frac{-2z\,dz}{z-b}=2a\int_{z_2}^{z_1}\left(1+\frac{b}{z-b}\right)dz=2a\,(z+b\ln|z-b|)\Big|_{\sqrt{H-h}}^{\sqrt{H}}=$$

$$=2a\left(\sqrt{H}-\sqrt{H-h}+b\ln\left|\frac{\sqrt{H}-b}{\sqrt{H-h}-b}\right|\right).$$

Здесь изменение уровня воды в резервуаре может быть двояким.

Если в начальный момент при $h=0$ скорость притока воды $V$ будет меньше скорости ее убывания из резервуара $0{,}6s\sqrt{2gH}$, то уровень воды будет понижаться до тех пор, пока эти скорости не станут одинаковыми. После этого вода будет оставаться на постоянном уровне, меньшем первоначального уровня $H$ на величину $h_1$, определяемую из уравнения $0{,}6s\sqrt{2g(H-h_1)}=V$.

Если же в начале процесса $V>0{,}6s\sqrt{2gH}$, то уровень воды в резервуаре будет подниматься до тех пор, пока не превысит первоначальный уровень $H$ на величину $h_2$, определяемую из уравнения

$$0{,}6s\sqrt{2g(H+h_2)}=V,$$

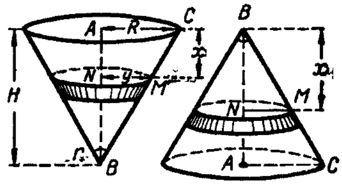
после чего уровень воды в резервуаре будет оставаться неизменным.

**667.** Два одинаковых сосуда имеют форму прямого круглого конуса с вертикальной осью; их расположение и размеры показаны на черт. 125. Оба сосуда наполнены водой и затем опорожняются через небольшие одинаковые круглые отверстия внизу.

Определить время опорожнения каждого сосуда и в какой момент времени вода в обоих сосудах будет на одном уровне, если их опорожнение началось одновременно.

Решение. Полагаем, что время $t$, за которое уровень воды в первом или во втором сосуде понизится на величину $x$, есть некоторая функция $t(x)$ и найдем ее дифференциал $dt$ при изменении $x$ на величину $dx$.

Пусть понижению уровня воды в сосуде на малую величину $dx$ соответствует малое приращение времени $\Delta t$. Тогда, допуская, что в течение этого малого промежутка времени вода вытекает из сосуда с постоянной скоростью, равной $0{,}6\sqrt{2g(H-x)}$, найдем, что объем воды, вытекшей за время $\Delta t$ через отверстие в дне площадью $\pi r^2$, будет $\Delta v \approx 0{,}6\pi r^2\sqrt{2g(H-x)}\,\Delta t$.




Черт. 125

За это же время $\Delta t$ объем воды в сосуде уменьшится на величину $\Delta v_1 \approx \pi y^2\,dx$, которая должна быть равна объему вытекшей воды $\Delta v$. Отсюда, из равенства $\Delta v = \Delta v_1$, получим

$$\Delta t \approx \frac{y^2\,dx}{0{,}6r^2\sqrt{2g(H-x)}} = dt.$$

Время $T$ полного опорожнения первого или второго сосуда получим, интегрируя $dt$ в пределах от $x=0$ до $x=H$:

$$T = \frac{1}{0{,}6r^2\sqrt{2g}}\int\limits_0^H \frac{y^2\,dx}{\sqrt{H-x}}.$$

Для вычисления этого интеграла выразим переменную $y$ через переменную $x$.

Из подобия треугольников $ABC$ и $NBM$* имеем:

а) для первого сосуда $\frac{H}{R} = \frac{H-x}{y}$, $\quad y = \frac{R}{H}(H-x)$;

б) для второго сосуда $\frac{H}{R} = \frac{x}{y}$; $\quad y = \frac{R}{H}\,x$.

Поэтому время $T_1$ полного опорожнения первого сосуда будет

$$T_1 = \frac{R^2}{0{,}6r^2H^2\sqrt{2g}}\int\limits_0^H \frac{(H-x)^2}{\sqrt{H-x}}\,dx = \frac{R^2}{0{,}6r^2H^2\sqrt{2g}}\cdot\frac{2\,(H-x)^{\frac{5}{2}}}{5}\Bigg|_H^0 =$$

$$= \frac{2R^2}{3r^2}\sqrt{\frac{H}{2g}}.$$

* Здесь вследствие малости $r$ по сравнению с другими размерами сосуда и для упрощения вычислений допускается, что осевое сечение сосуда представляет треугольник, а не трапецию.

Время $T_2$ полного опорожнения второго сосуда выражается интегралом

$$T_2 = \frac{R^2}{0{,}6r^2H^2\sqrt{2g}} \int_0^H \frac{x^2}{\sqrt{H-x}}\,dx.$$

Вводя новую переменную $z = H - x$, имеем: $dx = -dz$; $z_1 = H$ при $x = 0$; $z_2 = 0$ при $x = H$;

$$\int_0^H \frac{x^2dx}{\sqrt{H-x}} = -\int_H^0 \frac{(H-z)^2}{\sqrt{z}}\,dz = \int_0^H \left(H^2 z^{-\frac{1}{2}} - 2Hz^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{3}{2}}\right) dz = \frac{16}{15} H^{\frac{5}{2}}.$$

Подставляя найденное значение интеграла, получим $T_2 = \frac{16R^2}{9r^2}\sqrt{\frac{H}{2g}}$.

Сопоставив $T_2$ и $T_1$, взяв их отношение $\frac{T_2}{T_1} = \frac{8}{3}$, заключаем, что первый сосуд опорожняется значительно (почти в три раза) быстрее второго. При этом, если опорожнение сосудов начинается одновременно, то в начале процесса уровень воды в первом сосуде будет выше, чем во втором, затем наступит момент, когда уровни воды в обоих сосудах сравняются, после чего уровень воды в первом сосуде будет неизменно и все более ниже, чем во втором.

Для определения времени, спустя которое после начала одновременного опорожнения сосудов вода в них будет на одном уровне, найдем зависимость времени $t$ истечения воды от величины $x$ понижения ее уровня для каждого сосуда.

Интегрируя $dt$ в пределах от $x = 0$ до $x = x$, получим:

а) для первого сосуда

$$t = b\int_0^x (H-x)^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{2}{5} b (H-x)^{\frac{5}{2}}\Big|_x^0 = \frac{2}{5} b \left[H^{\frac{5}{2}} - (H-x)^{\frac{5}{2}}\right],$$

где

$$b = \frac{R^2}{0{,}6r^2H^2\sqrt{2g}};$$

б) для второго сосуда

$$t = b\int_0^x \frac{x^2dx}{\sqrt{H-x}} = b\int_{H-x}^H \left(H^2 z^{-\frac{1}{2}} - 2Hz^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{3}{2}}\right) dz =$$

$$= b\left(2H^2 z^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3} Hz^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} z^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_{H-x}^{H} =$$

$$= b\left\{2H^2\left[H^{\frac{1}{2}} - (H-x)^{\frac{1}{2}}\right] - \frac{4}{3} H\left[H^{\frac{3}{2}} - (H-x)^{\frac{3}{2}}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{5}\left[H^{\frac{5}{2}} - (H-x)^{\frac{5}{2}}\right]\right\}.$$

Рассматривая полученные зависимости $t$ от $x$ для первого и второго сосудов как уравнения с искомыми неизвестными $t$ и $x$ и решая их как систему (исключая $t$), найдем:

$$\frac{2}{5}\left[H^{\frac{5}{2}}-(H-x)^{\frac{5}{2}}\right]=2H^2\left[H^{\frac{1}{2}}-(H-x)^{\frac{1}{2}}\right]-$$

$$-\frac{4}{3}H\left[H^{\frac{3}{2}}-(H-x)^{\frac{3}{2}}\right]+\frac{2}{5}\left[H^{\frac{5}{2}}-(H-x)^{\frac{5}{2}}\right];$$

$$H\left[H^{\frac{1}{2}}-(H-x)^{\frac{1}{2}}\right]-\frac{2}{3}\left[H^{\frac{3}{2}}-(H-x)^{\frac{3}{2}}\right]=0;$$

$$\sqrt{H-x}\,(H+2x)=\sqrt{H^3};\quad 3H^2-4x^2=0;\quad x=\frac{H\sqrt{3}}{2}.$$

По найденному значению $x$ из первого (или второго) уравнения определяем $t$:

$$t=\frac{2}{5}bH^{\frac{5}{2}}\left[1-\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{5}{2}}\right].$$

По истечении этого промежутка времени $t$ после начала одновременного опорожнения обоих сосудов вода в них будет на одном уровне

$$h=H-x=H\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\approx 0{,}15H.$$

**668.** Определить массу шара радиуса $r$, если плотность в каждой его точке пропорциональна расстоянию ее от центра шара.

Решение. Пусть масса шара произвольного радиуса $x$ есть некоторая функция $m(x)$.

При увеличении $x$ на малую величину $dx$ объем $v$ этого шара увеличится на величину $\Delta v$, равную разности объемов шаров с радиусами $x$ и $x+dx$:

$$\Delta v=\frac{4}{3}\pi\left[(x+dx)^3-x^3\right]=$$

$$=\frac{4}{3}\pi\left(3x^2dx+3x\,dx^2+dx^3\right)\approx 4\pi x^2\,dx=dv.$$

Допуская, что во всех точках малого объема $dv$ плотность остается неизменной и равной $kx$, найдем приближенную величину его массы $dm=kx\,dv=4k\pi x^3\,dx$.

Искомую массу $M$ шара радиуса $r$ получим, интегрируя $dm$ в пределах от $x=0$ до $x=r$:

$$M=4k\pi\int_0^r x^3\,dx=k\pi x^4\Big|_0^r=k\pi r^4.$$

**669.** Квадрат со стороною 8 *м* вертикально погружен в воду так, что одна из его сторон лежит на поверхности воды. Определить давление воды на весь квадрат и на каждую из частей, на которые он разделяется диагональю.

**670.** Цилиндрический резервуар с горизонтальной осью и радиусом 3 *дм* наполовину наполнен ртутью (удельный вес 13,6). Определить давление ртути на каждую из плоских вертикальных стенок резервуара.

**671.** Вычислить работу, необходимую для выкачивания воды из котла, имеющего форму полусферы с радиусом 2 *м*.

**672.** Цилиндрический сосуд объемом в 0,1 $м^3$ наполнен атмосферным воздухом, который, изотермически расширяясь, выталкивает поршень (в пустоту). Найти работу, совершаемую воздухом при увеличении его объема до 0,3; 0,4; 0,5 $м^3$. (Атм. давление 10330 $кГ/м^2$.)

**673.** При условиях предыдущей задачи найти работу адиабатического расширения воздуха.

**674.** Прямой круглый конус с вертикальной осью погружен в воду так, что его вершина находится на поверхности воды. Определить работу, необходимую для извлечения конуса из воды, если его высота 10 *дм*, диаметр основания 20 *дм*, а удельный вес 3.

**675.** Деревянная прямоугольная балка плавает в воде. Вычислить работу, необходимую для извлечения балки из воды, если известны ее размеры $a = 6$ *м*, $b = 0{,}3$ *м*, $c = 0{,}2$ *м* и удельный вес $\delta = 0{,}8$.

**676.** Зная, что растяжение (удлинение) пружины пропорционально растягивающей силе, найти работу, затрачиваемую при растяжении пружины на 4 *см*, если для удлинения ее на 1 *см* требуется сила 3 *кГ*.

**677.** Цилиндрическая цистерна с горизонтальной осью, имеющая высоту $H$ и радиус основания $R$, заполнена водой.

Определить, за какое время через отверстие в дне площадью $S$ опорожнится:

1) верхняя половина цистерны и 2) нижняя половина цистерны. *

**678.** Определить количество воды, протекающей за 1 секунду через прямоугольный водослив вертикальной плотины, если его глубина $h$, а ширина $a$*.

**679.** Определить массу прямого круглого конуса, высота которого равна $H$, а угол между высотой и образующей $\alpha$, если плотность в каждой точке конуса пропорциональна расстоянию ее от плоскости, проходящей через его вершину параллельно основанию.

---

* См. указание к задаче 665.