§ 9. Координаты центра тяжести

Центром тяжести совокупности материальных точек называется центр параллельных сил тяжести, приложенных в этих точках.

Для материальной дуги AB плоской кривой прямоугольные координаты центра тяжести C определяются формулами

$$x_C=\frac{m_y}{m}=\frac{\int\limits_{(A)}^{(B)}\delta x\,dl}{\int\limits_{(A)}^{(B)}\delta\,dl},\qquad y_C=\frac{m_x}{m}=\frac{\int\limits_{(A)}^{(B)}\delta y\,dl}{\int\limits_{(A)}^{(B)}\delta\,dl},\tag{1}$$

где m — масса дуги AB; m_x и m_y — статические моменты этой дуги относительно осей Ox и Oy; $\delta(M)$ — линейная плотность распределения массы в точке $M(x, y)$ дуги; dl — дифференциал дуги; (A) и (B) обозначают значения выбранной переменной интегрирования в точках A и B.

Если материальная дуга является однородной, то формулы (1) упрощаются: постоянная δ выносится за знаки интегралов и сокращается.

Для материальной однородной криволинейной трапеции, прилежащей к оси Ox (см. черт. 87),

$$x_C=\frac{\int\limits_a^b xy\,dx}{\int\limits_a^b y\,dx};\qquad y_C=\frac{\int\limits_a^b y^2\,dx}{2\int\limits_a^b y\,dx}.\tag{2}$$

Центр тяжести однородной материальной линии или фигуры, имеющей ось симметрии, лежит на этой оси.

680. Найти центр тяжести четверти окружности $x^2+y^2=a^2$, расположенной в первом квадранте, если в каждой ее точке линейная плотность пропорциональна произведению координат точки.

Решение. Из уравнения окружности найдем y', затем dl:

$$2x+2yy'=0;\quad y'=-\frac{x}{y};$$

$$dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\,dx=\sqrt{\frac{y^2+x^2}{y^2}}\,dx=\frac{a}{y}\,dx.$$

Далее вычислим интегралы, содержащиеся в формулах (1), полагая, согласно условию, $\delta = kxy$:

$$\int\limits_{(A)}^{(B)} \delta x\,dl = \int\limits_0^a kxy \cdot x \cdot \frac{a}{y}\,dx = ka\int\limits_0^a x^2 dx = \frac{ka}{3}x^3\Big|_0^a = \frac{ka^4}{3},$$

$$\int\limits_{(A)}^{(B)} \delta y\,dl = ka\int\limits_0^a xy\,dx = ka\int\limits_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx =$$

$$= \frac{ka}{2}\int\limits_a^0 (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} d(a^2-x^2) = \frac{ka}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^0 = \frac{ka^4}{3},$$

$$\int\limits_{(A)}^{(B)} \delta\,dl = ka\int\limits_0^a x\,dx = \frac{ka}{2}x^2\Big|_0^a = \frac{ka^3}{2}.$$

Подставляя значения интегралов в формулы (1), получим

$$x_C = y_C = \frac{2}{3}a.$$

Очевидно, найденная точка не лежит на данной дуге, а расположена ниже ее.

681. Найти центр тяжести однородной арки циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1-\cos t), \quad \text{черт. } 126.$$

Решение. Данная однородная дуга симметрична относительно прямой $x = \pi a$. Поэтому центр тяжести дуги лежит на этой прямой, т. е. $x_C = \pi a$. Для определения y_C найдем дифференциал дуги циклоиды

$$dl = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = 2a\sin\frac{t}{2}\,dt$$

и вычислим интегралы, содержащиеся во второй из формул (1):

$$I_1 = \int\limits_{(A)}^{(B)} \delta y\,dl = 2\delta a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 2\delta a^2\left(\int \sin\frac{t}{2}\,dt - \int \cos t\sin\frac{t}{2}\,dt\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= 2\delta a^2\left\{2\int \sin\frac{t}{2}\,d\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\int\left[\sin\frac{3}{2}t + \sin\left(-\frac{t}{2}\right)\right]dt\right\}\Big|_0^{2\pi} =$$

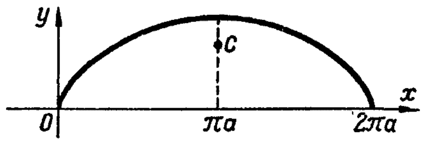
$$= 2\delta a^2\left(-3\cos\frac{t}{2} + \frac{1}{3}\cos\frac{3}{2}t\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{32}{3}\delta a^2.$$

$$I_2 = \int\limits_{(A)}^{(B)} \delta\,dl = 2\delta a\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = -4\delta a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8\delta a.$$

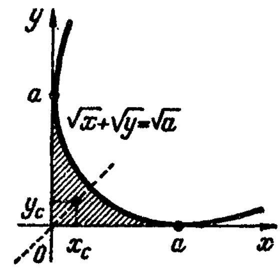
По формуле (1), $y_C = \frac{4}{3}a$.

682. Найти центр тяжести однородной фигуры (пластинки), ограниченной параболой $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ и осями координат.

Решение. Данная однородная фигура симметрична относительно биссектрисы первого координатного угла (черт. 127), поэтому $x_C=y_C$.



Черт. 126



Черт. 127

Вычислим интегралы, содержащиеся в первой из формул (2):

$$I_1=\int_a^b xy\,dx=\int_0^a x\left(a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)^2 dx=\int_0^a\left(ax-2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+x^2\right)dx=$$

$$=\left(\frac{1}{2}ax^2-\frac{4}{5}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^a=\frac{a^3}{30}.$$

$$I_2=\int_a^b y\,dx=\int_0^a\left(a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)^2 dx=\int_0^a\left(a-2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+x\right)dx=\frac{a^2}{6}.$$

Следовательно, $x_C=y_C=\frac{I_1}{I_2}=\frac{a}{5}$.

683. Найти центр тяжести однородной дуги полуокружности $x^2+y^2=a^2$, расположенной под осью Ox.

684. Найти центр тяжести однородного полукруга $x^2+y^2\leqslant a^2$, расположенного над осью Ox.

685. Найти центр тяжести однородной фигуры, ограниченной дугой эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ и координатными осями, расположенной в первом квадранте.

686. Найти центр тяжести однородной фигуры, ограниченной параболами $x^2=20y$ и $y^2=20x$.

687. Найти центр тяжести однородной дуги астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, расположенной правее оси Oy.

688. Найти центр тяжести дуги астроиды, расположенной в первом квадранте, если линейная плотность в каждой ее точке пропорциональна абсциссе точки.

§ 10. Несобственные интегралы

Интегралы с бесконечными пределами или от разрывных функций называются несобственными.