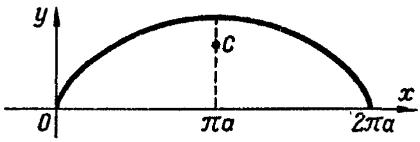
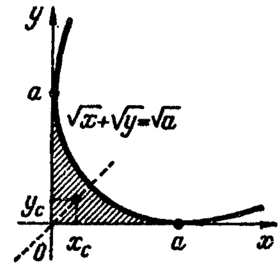
682. Найти центр тяжести однородной фигуры (пластинки), ограниченной параболой $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ и осями координат.

Решение. Данная однородная фигура симметрична относительно биссектрисы первого координатного угла (черт. 127), поэтому $x_C=y_C$.



Черт. 126



Черт. 127

Вычислим интегралы, содержащиеся в первой из формул (2):

$$I_1=\int\limits_a^b xy\,dx=\int\limits_0^a x\left(a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)^2 dx=\int\limits_0^a\left(ax-2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}+x^2\right)dx=$$

$$=\left(\frac{1}{2}ax^2-\frac{4}{5}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^a=\frac{a^3}{30}.$$

$$I_2=\int\limits_a^b y\,dx=\int\limits_0^a\left(a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)^2 dx=\int\limits_0^a\left(a-2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+x\right)dx=\frac{a^2}{6}.$$

Следовательно, $x_C=y_C=\frac{I_1}{I_2}=\frac{a}{5}$.

683. Найти центр тяжести однородной дуги полуокружности $x^2+y^2=a^2$, расположенной под осью Ox.

684. Найти центр тяжести однородного полукруга $x^2+y^2\leqslant a^2$, расположенного над осью Ox.

685. Найти центр тяжести однородной фигуры, ограниченной дугой эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$ и координатными осями, расположенной в первом квадранте.

686. Найти центр тяжести однородной фигуры, ограниченной параболами $x^2=20y$ и $y^2=20x$.

687. Найти центр тяжести однородной дуги астроиды $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, расположенной правее оси Oy.

688. Найти центр тяжести дуги астроиды, расположенной в первом квадранте, если линейная плотность в каждой ее точке пропорциональна абсциссе точки.

§ 10. Несобственные интегралы

Интегралы с бесконечными пределами или от разрывных функций называются несобственными.

I. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования определяются посредством предельного перехода:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\beta \to +\infty} \int_{a}^{\beta} f(x)\,dx, \tag{1}$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx, \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\alpha \to -\infty} \int_{\alpha}^{c} f(x)\,dx + \lim_{\beta \to +\infty} \int_{c}^{\beta} f(x)\,dx, \tag{3}$$

где c — произвольное вещественное число.

II. Несобственные интегралы от функций с бесконечными разрывами также определяются посредством предельного перехода:

если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $x=c$, принадлежащий отрезку $[a, b]$, и непрерывна во всех других точках этого отрезка, то

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon_1 \to +0} \int_{a}^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon_2 \to +0} \int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)\,dx, \tag{4}$$

где ε_1 и ε_2 изменяются независимо друг от друга.

Несобственные интегралы называются сходящимися или расходящимися, смотря по тому, существуют или нет определяющие их пределы соответствующих определенных (собственных) интегралов.

689. Найти следующие несобственные интегралы:

$$1) \int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx; \quad 2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}; \quad 3) \int_{0}^{1} \frac{dx}{x}; \quad 4) \int_{-1}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

Пояснить решение геометрически.

Решение. 1) Пользуясь равенством (1), имеем

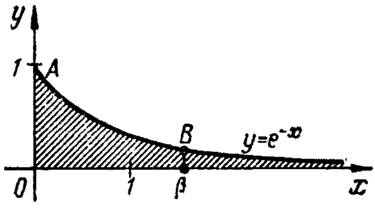
$$\int_{0}^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{\beta \to +\infty} \int_{0}^{\beta} e^{-x}dx = \lim\left(-e^{-x}\right)\Big|_{0}^{\beta} = \lim\left(e^{0} - e^{-\beta}\right) = 1.$$

Следовательно, данный несобственный интеграл сходится.

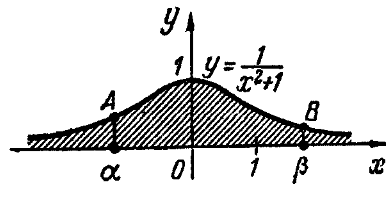
Геометрически, в прямоугольной системе координат, всякий определенный интеграл $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ *дает алгебраическую сумму площадей, ограниченных кривой $y=f(x)$, двумя вертикальными прямыми $x=a$, $x=b$ и осью Ox.* Поэтому, построив кривую $y=e^{-x}$ и ее ординаты в точках $x=0$ и $x=\beta$ (черт. 128), получим криволинейную трапецию $OAB\beta$, площадь которой

$$S(\beta)=\int_0^\beta e^{-x}\,dx=1-e^{-\beta}.$$

При $\beta\to+\infty$ получим трапецию с бесконечным основанием, которая имеет конечную площадь $S(+\infty)=\lim\limits_{\beta\to+\infty}S(\beta)=1$.



Черт. 128



Черт. 129

2) Пользуясь определением (3), получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=\lim_{\alpha\to-\infty}\int_\alpha^0\frac{dx}{x^2+1}+\lim_{\beta\to+\infty}\int_0^\beta\frac{dx}{x^2+1}=\lim\operatorname{arc\,tg}x\Big|_\alpha^0+$$

$$+\lim\operatorname{arc\,tg}x\Big|_0^\beta=-\operatorname{arc\,tg}(-\infty)+\operatorname{arc\,tg}(+\infty)=$$

$$=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Геометрически (черт. 129) интеграл от функции $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ в пределах от α до β выражает площадь криволинейной трапеции $\alpha AB\beta$, а данный несобственный сходящийся интеграл выражает площадь бесконечной криволинейной трапеции, которая неограниченно простирается влево и вправо и вместе с тем имеет конечную величину π.

3) Здесь при $x=0$ подынтегральная функция $\frac{1}{x}$ имеет бесконечный разрыв. Согласно определению (4)

$$\int_0^1\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x}=\lim\ln x\Big|_\varepsilon^1=\lim(\ln 1-\ln\varepsilon)=-\ln 0=+\infty,$$

т. е. этот несобственный интеграл расходится.

Геометрически (черт. 130) полученный результат указывает, что площадь криволинейной трапеции εABb

$$S(\varepsilon)=\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x}=-\ln\varepsilon$$

при $\varepsilon\to+0$ неограниченно возрастает.

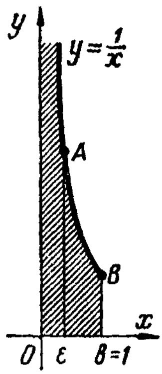
4) Здесь подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв в точке $x=1$, лежащей внутри отрезка интегрирования $[-1;\ 2]$. Поэтому, согласно определению (4),

$$\int_{-1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_{-1}^{1-\varepsilon_1}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{1+\varepsilon_2}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}=$$

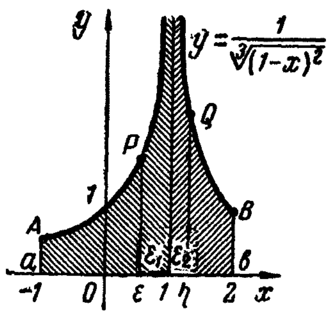
$$=\lim 3\sqrt[3]{x-1}\Big|_{-1}^{1-\varepsilon_1}+\lim 3\sqrt[3]{x-1}\Big|_{1+\varepsilon_2}^{2}=3\lim\left(\sqrt[3]{-\varepsilon_1}-\sqrt[3]{-2}\right)+$$

$$+3\lim\left(\sqrt[3]{1}-\sqrt[3]{\varepsilon_2}\right)=3\left(\sqrt[3]{2}+1\right).$$

Для графика подынтегральной функции $y=\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ (черт. 131) прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой. Ин-



Черт. 130



Черт. 131

тегралы от этой функции в пределах от -1 до $1-\varepsilon_1$ и от $1+\varepsilon_2$ до 2 выражают площади криволинейных трапеций $aAP\varepsilon$ и ηQBb. При $\varepsilon_1\to+0$ и $\varepsilon_2\to+0$ эти трапеции неограниченно простираются вверх и вместе с тем имеют конечные площади, сумма которых равна найденному значению данного несобственного сходящегося интеграла.

690. Найти несобственные интегралы:

$$1)\ \int_{0}^{2}\frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}};\quad 2)\ \int_{1}^{+\infty}\frac{\ln x}{x^3}dx.$$

Решение.

1) Преобразуем интеграл к новой переменной. Полагая $x=2\sin t$, получим: $dx=2\cos t\,dt$; $t=0$ при $x=0$; $t=\frac{\pi}{2}$ при $x=2$;

$$\int_0^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 t\cos t}{\cos t}dt=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\,dt=8\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos^2 t)\,d\cos t=$$

$$=8\left(\cos t-\frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{0}=\frac{16}{3}.$$

Здесь *в результате замены переменной данный несобственный интеграл* (от функции, имеющей бесконечный разрыв в правом конце интервала интегрирования) *преобразовался в собственный интеграл* от непрерывной функции и с конечным интервалом интегрирования, который вычислен обычным путем без применения предельного перехода.

Возможно и обратное. *При замене переменной собственный интеграл может перейти в несобственный.*

2) Согласно определению (1)

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{\ln x\,dx}{x^3}=\lim_{\beta\to+\infty}\int_1^{\beta}\frac{\ln x\,dx}{x^3}.$$

К последнему интегралу применяем формулу интегрирования по частям $\int u\,dv=uv-\int v\,du$. Полагая $u=\ln x$, $dv=x^{-3}dx$, получим $du=\frac{dx}{x}$, $v=-\frac{1}{2x^2}$ и

$$\int_1^{\beta}\frac{\ln x}{x^3}dx=-\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3}\Bigg|_1^{\beta}=-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}\Bigg|_1^{\beta}=-\frac{\ln\beta}{2\beta^2}-\frac{1}{4\beta^2}+\frac{1}{4}.$$

Подставляя в предыдущее равенство, имеем:

$$I=\lim_{\beta\to+\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4\beta^2}-\frac{\ln\beta}{2\beta^2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\lim\frac{\ln\beta}{\beta^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\lim\left(\frac{1}{\beta}:2\beta\right)=\frac{1}{4}.$$

Здесь для нахождения предела последнего слагаемого применено правило Лопиталя.

Найти несобственные интегралы:

691. $\int\limits_{-\infty}^{1} e^t\,dt.$

692. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$

693. $\int\limits_{0}^{1} \ln x\,dx.$

694. $\int\limits_{2}^{3} \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^2-4}}.$

695. $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x\,dx.$

696. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}.$

697. $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}.$

698. $\int\limits_{-2}^{2} \frac{x\,dx}{x^2-1}.$

699. Найти площадь, заключенную между кривой $y=e^{-\frac{x}{3}}$ и осями координат (при $x \geqslant 0$).

700. Найти объем тела, образованного вращением кривой $y=\frac{x}{\sqrt{e^x}}$ (при $x \geqslant 0$) вокруг ее асимптоты.

§ 11. Приближенное вычисление определенных интегралов

Для приближенного вычисления определенных интегралов имеется несколько способов. Если функция $f(x)$ задана формулой или таблицей, то приближенное значение определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ можно найти следующим путем:

1) разделить интервал интегрирования $[a, b]$ точками x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1} на n равных частей $h=\frac{b-a}{n}$;

2) вычислить значения подынтегральной функции $y=f(x)$ в точках деления $y_0=f(a)$, $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$, ..., $y_{n-1}=f(x_{n-1})$, $y_n=f(b)$;

3) воспользоваться одной из приближенных формул.

Наиболее употребительны следующие приближенные формулы, основанные на геометрическом представлении определенного интеграла в виде площади криволинейной трапеции.

I. Формула прямоугольников

$$\int\limits_a^b y\,dx \approx h(y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1})=h\sum_{i=0}^{n-1} y_i \qquad (1)$$

или

$$\int\limits_a^b y\,dx \approx h(y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n)=h\sum_{i=1}^{n} y_i. \qquad (1a)$$