Найти несобственные интегралы:

691. $\int\limits_{-\infty}^{1} e^t\,dt.$ **692.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}.$

693. $\int\limits_{0}^{1} \ln x\,dx.$ **694.** $\int\limits_{2}^{3} \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^2-4}}.$

695. $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^x\,dx.$ **696.** $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}.$

697. $\int\limits_{2}^{6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}.$ **698.** $\int\limits_{-2}^{2} \frac{x\,dx}{x^2-1}.$

699. Найти площадь, заключенную между кривой $y=e^{-\frac{x}{3}}$ и осями координат (при $x\geqslant 0$).

700. Найти объем тела, образованного вращением кривой $y=\frac{x}{\sqrt{e^x}}$ (при $x\geqslant 0$) вокруг ее асимптоты.

§ 11. Приближенное вычисление определенных интегралов

Для приближенного вычисления определенных интегралов имеется несколько способов. Если функция $f(x)$ задана формулой или таблицей, то приближенное значение определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ можно найти следующим путем:

1) разделить интервал интегрирования $[a, b]$ точками $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ на n равных частей $h=\frac{b-a}{n}$;

2) вычислить значения подынтегральной функции $y=f(x)$ в точках деления $y_0=f(a),\ y_1=f(x_1),\ y_2=f(x_2),\ \ldots,\ y_{n-1}=f(x_{n-1}),\ y_n=f(b)$;

3) воспользоваться одной из приближенных формул.

Наиболее употребительны следующие приближенные формулы, основанные на геометрическом представлении определенного интеграла в виде площади криволинейной трапеции.

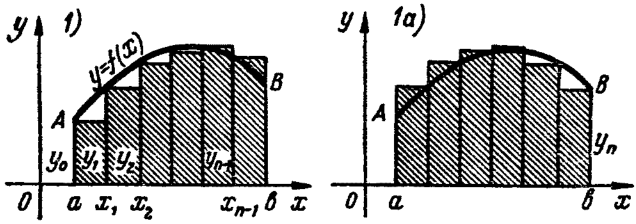
I. Формула прямоугольников

$$\int\limits_a^b y\,dx \approx h(y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1})=h\sum_{i=0}^{n-1} y_i \tag{1}$$

или

$$\int\limits_a^b y\,dx \approx h(y_1+y_2+y_3+\ldots+y_n)=h\sum_{i=1}^{n} y_i. \tag{1a}$$

Геометрически (черт. 132) по этой формуле площадь криволинейной трапеции $aABb$, которая соответствует интегралу $\int\limits_a^b y\,dx$, заменяется суммой площадей заштрихованных прямоугольников.



Черт. 132

Погрешность формулы прямоугольников

$$\delta(n) \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n} y'_{НБ},$$

где $y'_{НБ}$ — наибольшее значение $|y'|$ в интервале $[a, b]$.

II. Формула трапеций

$$\int\limits_a^b y\,dx \approx h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\ldots+y_{n-1}\right)=h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+\right.$$

$$\left.+\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right). \qquad (2)$$

Геометрически (черт. 133) по этой формуле площадь криволинейной трапеции заменяется суммой площадей заштрихованных трапеций.

Погрешность формулы трапеций

$$\delta(n) \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} y''_{НБ},$$

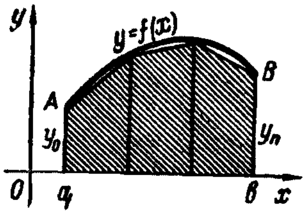
где $y''_{НБ}$ — наибольшее значение $|y''|$ в интервале $[a, b]$.

III. Формула параболических трапеций (Симпсона); n — число четное.

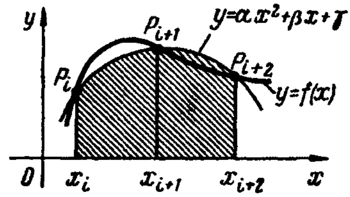
$$\int\limits_a^b y\,dx \approx \frac{h}{3}[y_0+y_n+4(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1})+$$

$$+2(y_2+y_4+\ldots+y_{n-2})]. \qquad (3)$$

Геометрически (черт. 134) по этой формуле площадь каждой пары вертикальных полосок $x_iP_iP_{i+2}x_{i+2}$ заменяется площадью одноименной параболической трапеции, получаемой при замене соответствующего участка кривой $y=f(x)$ дугой параболы $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ (с вертикальной осью), проходящей через три точки кривой с абсциссами x_i, $x_{i+1}=x_i+h$ и $x_{i+2}=x_i+2h$.



Черт. 133



Черт. 134

Погрешность формулы Симпсона

$$\delta(n) \leqslant \frac{(b-a)^5}{180n^4}\, y^{(4)}_{НБ},$$

где $y^{(4)}_{НБ}$ — наибольшее значение $|y^{(4)}|$ в интервале $[a, b]$.

Очевидно, все указанные приближенные формулы будут тем точнее, чем больше взято n, т. е. при достаточно большом значении n посредством каждой из этих формул можно вычислить приближенное значение определенного интеграла с любой желаемой точностью.

При одном и том же значении n обычно вторая формула точнее первой, а третья точнее второй.

701. Вычислить интеграл $\int\limits_1^9 \sqrt{6x-5}\,dx$ по формуле Ньютона—Лейбница и по приближенным формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона, разбивая интервал интегрирования на 8 равных частей. Затем оценить в процентах погрешность результатов, полученных по приближенным формулам.

Решение. По формуле Ньютона — Лейбница

$$I=\int\limits_1^9 \sqrt{6x-5}\,dx=\frac{1}{6}\int\limits_1^9 (6x-5)^{\frac{1}{2}}\,d(6x-5)=\frac{1}{9}(6x-5)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^9=38.$$

Далее делим интервал интегрирования $[1; 9]$ на 8 равных частей, находим длину одной части $h=1$, точки деления x_i, значения y_i подынтегральной функции $y=\sqrt{6x-5}$ в этих точках:

$$\begin{array}{ll} x_0=1 & y_0=\sqrt{1}=1,0000 \\ x_1=2 & y_1=\sqrt{7}=2,6458 \\ x_2=3 & y_2=\sqrt{13}=3,6056 \\ x_3=4 & y_3=\sqrt{19}=4,3589 \\ x_4=5 & y_4=\sqrt{25}=5,0000 \\ x_5=6 & y_5=\sqrt{31}=5,5678 \\ x_6=7 & y_6=\sqrt{37}=6,0828 \\ x_7=8 & y_7=\sqrt{43}=6,5574 \\ x_8=9 & y_8=\sqrt{49}=7,0000 \end{array}$$

и вычисляем интеграл по приближенным формулам.

По формуле прямоугольников (1) $I\approx\sum_{i=0}^{7}y_i=34,8183.$

Абсолютная ошибка этого приближенного значения (по недостатку) равна $38-34,8183=3,1817$, а относительная (процентная) ошибка равна $\frac{3,1817\cdot100}{38}\approx8,37\%$.

По формуле прямоугольников (1*а*) $I\approx\sum_{i=1}^{8}y_i=40,8183.$

Здесь абсолютная ошибка (по избытку) равна 2,8183, а относительная $\frac{2,8183\cdot100}{38}\approx7,42\%$.

По формуле трапеций $I\approx4+\sum_{i=1}^{7}y_i=37,8183.$

Абсолютная ошибка этого результата составляет 0,1817, а относительная $\frac{0,1817\cdot100}{38}\approx0,48\%$.

По формуле Симпсона

$$I\approx\frac{1}{3}(8+4\cdot19,1299+2\cdot14,6884)\approx37,9655.$$

Абсолютная ошибка составляет всего 0,0345, а относительная $\frac{0,0345\cdot100}{38}\approx0,09\%$.

702. По формуле Симпсона вычислить приближенное значение интеграла $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$ с точностью до 0,00001.

Решение. Вначале определим, на какое число n частей следует разделить интервал интегрирования $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, чтобы получить заданную точность вычисления.

Полагая погрешность $\delta(n)$ формулы Симпсона меньше 10^{-5}, имеем

$$\frac{(b-a)^5}{180\,n^4}\,y_{НБ}^{(4)} < 10^{-5}.$$

Подставляя $a=0$, $b=\frac{\pi}{2}$, $y_{НБ}^{(4)}=1$ $\Big($наибольшее значение $|y^{(4)}| = |\cos x|$ в интервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\Big)$, получим

$$\frac{\pi^5}{2^5\,180\,n^4} < 10^{-5}; \quad n > 5\pi\sqrt[4]{\frac{\pi}{36}} = 8{,}5.$$

Далее, полагая $n=10$ (ближайшее четное число, большее 8,5) определяем точки деления x_i и соответствующие им значения y_i подынтегральной функции $y=\cos x$ (с одним лишним десятичным знаком, $\pi \approx 3{,}141592$):

$x_0 = 0{,}000000$	$y_0 = 1{,}000000$
$x_1 = 0{,}157080$	$y_1 = 0{,}987688$
$x_2 = 0{,}314159$	$y_2 = 0{,}951057$
$x_3 = 0{,}471239$	$y_3 = 0{,}891007$
$x_4 = 0{,}628318$	$y_4 = 0{,}809017$
$x_5 = 0{,}785398$	$y_5 = 0{,}707107$
$x_6 = 0{,}942478$	$y_6 = 0{,}587785$
$x_7 = 1{,}099557$	$y_7 = 0{,}453991$
$x_8 = 1{,}256637$	$y_8 = 0{,}309017$
$x_9 = 1{,}413716$	$y_9 = 0{,}156435$
$x_{10} = 1{,}570796$	$y_{10} = 0{,}000000$

Подставляя в формулу Симпсона, получим искомое значение интеграла с точностью до 10^{-5}:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx \approx 0{,}0523599\,(1+4\cdot 3{,}196228+2\cdot 2{,}656876) \approx 1{,}00000.$$

В решении этой задачи показано, что для вычисления интеграла с заданной точностью, когда известно аналитическое выражение интегрируемой функции, можно, исходя из указанных неравенств для оценки погрешности приближенных формул, заранее определить необходимое число делений интервала интегрирования, которое бы обеспечило заданную точность.

Однако во многих случаях аналитическое выражение интегрируемой функции таково, что трудно найти наибольшее значение во всем интервале интегрирования для производных первого, второго или четвертого порядков, которые содержатся в неравенствах, определяющих погрешности формул прямоугольников, трапеций или Симпсона. Поэтому в вычислительной практике вместо указанных неравенств для оценки погрешности приближенного вычисления интегралов часто применяют другие критерии, с которыми можно ознакомиться в специальных пособиях по приближенным вычислениям.

703. Следующие интегралы вычислить по формуле Ньютона — Лейбница и по приближенным формулам прямоугольников, трапеций и Симпсона, разбивая интервал интегрирования на 10 равных частей. Затем оценить в процентах погрешность результатов, полученных по приближенным формулам. (Все вычисления делать с четырьмя десятичными знаками.)

$$1) \int_1^2 \frac{dx}{x}; \qquad 2) \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}.$$

704*. На сколько частей следует разделить интервал интегрирования интеграла $\int_1^2 \frac{dx}{x}$, чтобы вычислить его с точностью до 10^{-2} по приближенным формулам: 1) прямоугольников, 2) трапеций и 3) Симпсона.

705. По формуле Симпсона вычислить интегралы $\int_2^3 \frac{dx}{\ln x}$ и $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x^2)\,dx$, разделив интервал интегрирования на 10 равных частей.*

706*. Найти длину дуги эллипса $x = 10\cos t$, $y = 6\sin t$, применив к интегралу, определяющему четверть всей дуги, формулу Симпсона.*

---

* Все вычисления выполнять с тремя десятичными знаками.