ГЛАВА VI

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Функции многих переменных, их обозначение и область определения

Переменная u называется функцией n переменных (аргументов) $x, y, z, \ldots, t$, если каждой системе значений $x, y, z, \ldots, t$, из области их изменения, соответствует определенное значение u.

Функциональная зависимость u от $x, y, z, \ldots, t$ символически обозначается: $u=f(x, y, z, \ldots, t)$, где после символа функции (которым может быть не только буква f, но и другие буквы) в скобках указываются все переменные, от которых зависит данная функция.

Частное значение функции $P(x, y, z, \ldots, t)$ при $x=a$, $y=b$, $z=c, \ldots, t=l$ обозначается $P(a, b, c, \ldots, l)$. Например, если $F(x, y, z)=\frac{3x}{y-\lg z}$, то $F(-2; 3; 10)=\frac{-6}{3-1}=-3$.

Геометрически каждая система значений двух переменных x, y изображается точкой на плоскости, а функция двух переменных $z=f(x, y)$ — некоторой поверхностью в пространстве; система значений трех переменных x, y, z изображается точкой в пространстве. (Обычно значения переменных рассматриваются как абсцисса, ордината и апликата точки в прямоугольной системе координат.)

Система значений четырех и большего числа переменных не имеет геометрического изображения. Однако, в целях общности, для упрощения записей и рассуждений, *систему значений любого числа n переменных $x, y, z, \ldots, t$ называют точкой n-мерного пространства $M(x, y, z, \ldots, t)$, а функцию u, зависящую от n переменных, называют функцией точки n-мерного пространства $u=f(x, y, z, \ldots, t)=f(M)$.*

Областью определения (существования) функции называется совокупность всех точек, в которых она имеет определенные действительные значения.

Для функции двух переменных $z=f(x, y)$ область определения представляет некоторую совокупность точек плоскости, а для функции трех переменных $u = F(x, y, z)$ — некоторую совокупность точек пространства.

707. Вычислить частное значение функции:

1) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ при $x = 5$, $y = -3$;

2) $u = \ln\frac{x+z}{2y-z}$ в точке $A(6; 2; -1)$.

Решение. 1) $f(5; -3) = \sqrt{5^2 - (-3)^2} = 4$;

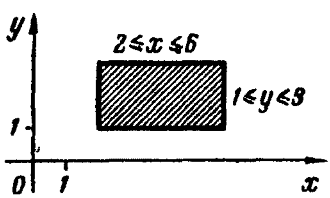
2) $u(A) = \ln\frac{6-1}{4+1} = 0$.

708. Построить область D изменения переменных x и y, заданную следующими неравенствами:

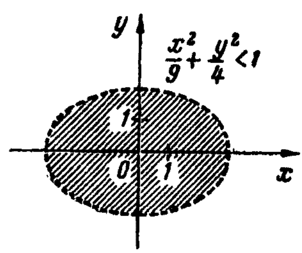
1) $2 \leqslant x \leqslant 6$, $1 \leqslant y \leqslant 3$; 2) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1$;

3) $4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9$; 4) $0 < y < x$.

Решение. 1) Данным неравенствам удовлетворяют координаты любой точки, находящейся внутри и на границе прямоугольника, стороны которого лежат на прямых $x = 2$, $x = 6$, $y = 1$ и $y = 3$. Этот прямоугольник и есть область D изменения



Черт. 135



Черт. 136

переменных x и y (черт. 135). Такая область, в которую входит и ее граница, называется замкнутой.

2) Здесь область D есть совокупность всех точек, лежащих внутри эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, так как все эти точки, и только они, удовлетворяют данному неравенству (черт. 136). Такая область, в которую не входит ее граница, называется открытой.

3) Здесь область D есть круговое кольцо, ограниченное окружностями $x^2 + y^2 = 4$ и $x^2 + y^2 = 9$ с общим центром в начале координат и радиусами $r_1 = 2$ и $r_2 = 3$, черт. 137 (замкнутая область).

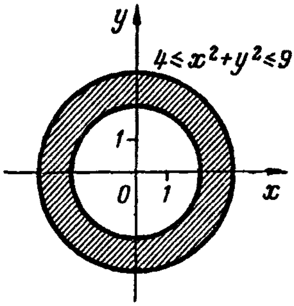
4) Здесь область D (открытая) ограничена биссектрисой первого координатного угла и осью абсцисс (черт. 138).

709. Найти области определения следующих функций:

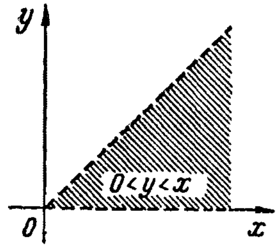
1) $z = 4 - x - 2y$; 2) $p = \frac{3}{x^2 + y^2}$; 3) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;

4) $q = \frac{1}{\sqrt{xy}}$; 5) $u = \frac{x^2 y}{2x + y}$; 6) $v = \arcsin(x + y)$.

Решение. Руководствуясь указаниями § 2, гл. I, последовательно находим:



Черт. 137



Черт. 138

1) Функция z, как и всякая целая рациональная функция, определена (может быть вычислена) при любых значениях x и y, т. е. область определения функции z есть вся числовая плоскость xOy, $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$. Геометрическое изображение (график) этой функции есть плоскость, пересекающая координатные оси в точках $A(4; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$ и $C(0; 0; 4)$.

2) Функция p определена при любой системе значений x, y, кроме системы $x = 0$, $y = 0$, при которой ее знаменатель обращается в нуль. Поэтому областью определения функции p является вся числовая плоскость, кроме точки $(0; 0)$.

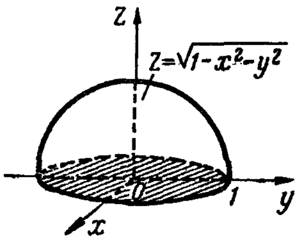
3) Область определения функции z есть круг с центром в начале координат и радиусом $r = 1$, включая и его границу — окружность $x^2 + y^2 = 1$ (замкнутая область). Внутри круга подкоренное выражение положительно, на его границе — равно нулю, а вне круга — отрицательно. Графическим изображением функции является полусфера, расположенная над плоскостью xOy (черт. 139).

4) Функция q определена в тех и только в тех точках плоскости xOy, координаты которых удовлетворяют неравенству $xy > 0$. Все эти точки лежат внутри первого и третьего квадрантов (открытая область).

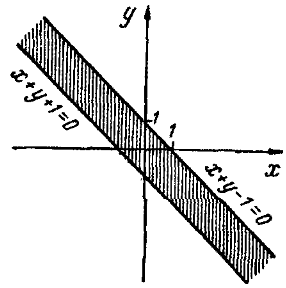
5) Областью определения функции u является вся плоскость xOy, за исключением прямой $2x + y = 0$, в точках которой знаменатель функции u обращается в нуль.

6) Область определения функции v есть совокупность систем значений x и y, удовлетворяющих неравенствам $-1 \leqslant x+y \leqslant 1$. На плоскости xOy эта область представляет полосу, ограниченную параллельными прямыми $x+y+1=0$ и $x+y-1=0$ (черт. 140).

710. $\varphi(x, y)=\frac{2x-y}{x-2y}$; вычислить $\varphi(1; 2)$, $\varphi(3; 1)$, $\varphi(a; 2a)$, $\varphi(2b, -b)$.



Черт. 139



Черт. 140

711. $F(x, y) = 3x^2y-\sqrt{x^6-y^6}$; показать, что $F(tx, ty)= = t^3F(x, y)$.

712. Построить области изменения переменных x и y, заданные неравенствами:

1) $-1<x<1$, $-1<y<1$; 2) $x^2+y^2 \leqslant 9$, $y \leqslant 0$;
3) $x^2+2y^2<4$, $x>0$, $y>0$; 4) $1 \leqslant x-y \leqslant 3$.

713. Найти области определения функций:

1) $z=a^2-x^2-2y^2$; 2) $u=-\sqrt{2-x^2-2y^2}$;
3) $v=\frac{1}{x^2-y^2}$; 4) $w=\sqrt{3x}-\frac{5}{\sqrt{y}}$;
5) $p=\frac{\ln(x^2y)}{\sqrt{y-x}}$; 6) $q=\arccos(x^2+y^2)$.

§ 2. Предел функции многих переменных. Непрерывность

Число A называется пределом функции $f(M)$ в точке M_0.

$$\lim_{M \to M_0} f(M)=A,$$

если абсолютное значение разности $f(M)-f(M_0)$ будет меньше любого заранее данного положительного числа ε, когда расстояние MM_0 меньше некоторого положительного числа δ (зависящего от ε).

Функция $f(M)$ называется непрерывной, в точке M_0, если

$$\lim_{M \to M_0} f(M)=f(M_0).$$