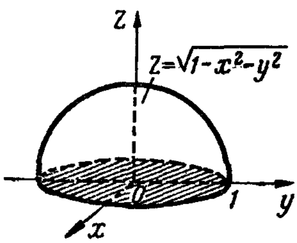
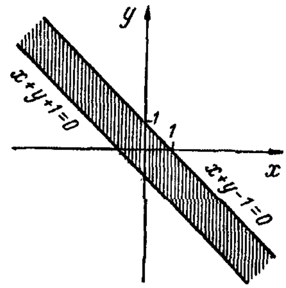
6) Область определения функции v есть совокупность систем значений x и y, удовлетворяющих неравенствам $-1 \leqslant x+y \leqslant 1$. На плоскости xOy эта область представляет полосу, ограниченную параллельными прямыми $x+y+1=0$ и $x+y-1=0$ (черт. 140).

710. $\varphi(x, y)=\frac{2x-y}{x-2y}$; вычислить $\varphi(1; 2)$, $\varphi(3; 1)$, $\varphi(a; 2a)$, $\varphi(2b, -b)$.



Черт. 139



Черт. 140

711. $F(x, y) = 3x^2y-\sqrt{x^6-y^6}$; показать, что $F(tx, ty)= = t^3F(x, y)$.

712. Построить области изменения переменных x и y, заданные неравенствами:

1) $-1<x<1$, $-1<y<1$; 2) $x^2+y^2 \leqslant 9$, $y \leqslant 0$;
3) $x^2+2y^2<4$, $x>0$, $y>0$; 4) $1 \leqslant x-y \leqslant 3$.

713. Найти области определения функций:

1) $z=a^2-x^2-2y^2$; 2) $u=-\sqrt{2-x^2-2y^2}$;
3) $v=\frac{1}{x^2-y^2}$; 4) $w=\sqrt{3x}-\frac{5}{\sqrt{y}}$;
5) $p=\frac{\ln(x^2y)}{\sqrt{y-x}}$; 6) $q=\arccos(x^2+y^2)$.

§ 2. Предел функции многих переменных. Непрерывность

Число A называется пределом функции $f(M)$ в точке M_0.

$$\lim_{M \to M_0} f(M)=A,$$

если абсолютное значение разности $f(M)-f(M_0)$ будет меньше любого заранее данного положительного числа ε, когда расстояние MM_0 меньше некоторого положительного числа δ (зависящего от ε).

Функция $f(M)$ называется непрерывной, в точке M_0, если

$$\lim_{M \to M_0} f(M)=f(M_0).$$

Для непрерывности функции $f(M)$ в точке M_0 необходимо выполнение следующих условий:

1) $f(M)$ должна быть определена в точке M_0 и вблизи этой точки;

2) $f(M)$ должна иметь предел, когда точка $M \to M_0$ произвольным способом;

3) этот предел должен быть равен $f(M_0)$.

Функция $f(M)$, непрерывная в каждой точке некоторой области D, называется непрерывной в этой области.

714. Найти пределы:

$$1)\ \lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y}; \qquad 2)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{x+y}.$$

Решение. Убедившись, что функция не определена в предельной точке, делаем преобразования, руководствуясь указаниями § 7, гл. I:

$$1)\ \lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y} = \lim x \cdot \lim \frac{\operatorname{tg}(xy)}{xy} = 3\cdot 1 = 3, \text{ так как } \lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} = 1.$$

$$2)\ \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{x+y} = \lim \frac{1}{1+\frac{y}{x}}$$ — не существует, ибо отношение $\frac{y}{x}$ не имеет предела при произвольном стремлении точки $M(x,\ y)$ к точке $M_0(0;\ 0)$. Так, если $M \to M_0$ вдоль различных прямых $y = kx$, то $\frac{y}{x} = k$, т. е. зависит от углового коэффициента прямой, по которой движется точка M.

715. В каких случаях функция многих переменных $f(M)$ будет разрывна в точке M_0? Пояснить их примерами.

Решение. 1) Функция $f(M)$ будет разрывна в точке M_0, если она определена вблизи этой точки, но не определена в самой точке M_0.

Например, функция $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+3y^2}}$ определена на всей плоскости xOy, но не определена в точке $M_0(0;\ 0)$, поэтому в этой точке функция разрывна. Во всех других точках числовой плоскости она непрерывна.

2) Функция $f(M)$ будет разрывна в точке M_0, если она определена вблизи этой точки и в самой точке, но не имеет предела, когда точка $M \to M_0$.

Например, функция

$$u = \begin{cases} \sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{при } x \neq 0,\ y \neq 0 \\ 3 & \text{при } x = y = 0 \end{cases}$$

разрывна в точке $M_0(0;\ 0)$, так как она определена вблизи этой точки и в самой точке (на всей плоскости xOy), но не имеет предела при $M \longrightarrow M_0$. В остальных точках плоскости xOy она непрерывна.

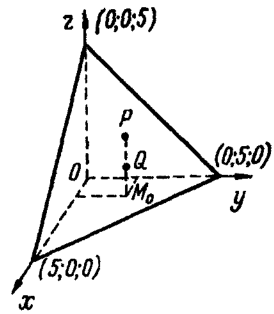
3) Функция $f(M)$ будет разрывна в точке M_0, если она определена вблизи этой точки и в самой точке, но $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) \neq f(M_0)$.

Например, функция

$$z = \begin{cases} 5-x-y & \text{при } x \neq 1,\ y \neq 2 \\ 1 & \text{при } x = 1,\ y = 2 \end{cases}$$

разрывна в точке $M_0(1;\ 2)$, ибо она определена вблизи этой точки и в самой точке, но ее предел при $M \longrightarrow M_0$ не совпадает с частным значением в точке M_0; $\lim\limits_{M \to M_0} z = 2 \neq z(M_0) = 1$.

Графиком этой функции является вся плоскость $z = 5-x-y$ без точки $P(1;\ 2;\ 2)$, вместо которой графику принадлежит точка $Q(1;\ 2;\ 1)$ (черт. 141).



Черт. 141

Функция двух переменных $z = f(x, y)$ может иметь множество точек разрыва; если они составляют линию, то она называется линией разрыва функции.

Например, функция $z = \dfrac{1}{1-x^2-y^2}$ разрывна в каждой точке окружности $x^2 + y^2 = 1$. Эта окружность есть линия разрыва данной функции.

716. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{a - \sqrt{a^2 - xy}}{xy}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \dfrac{xy}{\sin(xy)}$ 3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{2x^3 + 3y^2}{x^2 + y^2}$.

717. Указать точки или линии разрыва функций:

1) $z = \dfrac{10x}{(x-1)^2 + (y-1)^2}$; 2) $z = \dfrac{3y}{2x-y}$; 3) $z = \dfrac{x^2}{x^2 - 2y^2 - 4}$.

§ 3. Частные производные функции многих переменных

Функцию $u = f(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)$ можно дифференцировать по каждому из ее аргументов, считая при этом все остальные аргументы постоянными.

Производная от функции $u = f(x, y, z, \ldots, t)$ по x, взятая в предположении, что все остальные аргументы $y,\ z,\ \ldots,\ t$ являются постоянными, называется частной производной от u по x