разрывна в точке $M_0(0;\ 0)$, так как она определена вблизи этой точки и в самой точке (на всей плоскости xOy), но не имеет предела при $M \to M_0$. В остальных точках плоскости xOy она непрерывна.

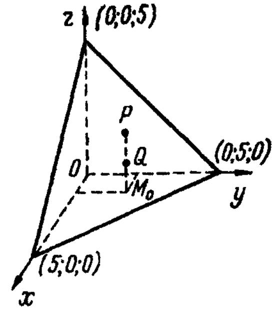
3) Функция $f(M)$ будет разрывна в точке M_0, если она определена вблизи этой точки и в самой точке, но $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) \neq f(M_0)$.

Например, функция

$$z=\begin{cases} 5-x-y & \text{при } x \neq 1,\ y \neq 2 \\ 1 & \text{при } x=1,\ y=2 \end{cases}$$

разрывна в точке $M_0(1;\ 2)$, ибо она определена вблизи этой точки и в самой точке, но ее предел при $M \to M_0$ не совпадает с частным значением в точке M_0; $\lim\limits_{M \to M_0} z = 2 \neq z(M_0) = 1$.

Графиком этой функции является вся плоскость $z=5-x-y$ без точки $P(1;\ 2;\ 2)$, вместо которой графику принадлежит точка $Q(1;\ 2;\ 1)$ (черт. 141).



Черт. 141

Функция двух переменных $z=f(x,\ y)$ может иметь множество точек разрыва; если они составляют линию, то она называется линией разрыва функции.

Например, функция $z=\frac{1}{1-x^2-y^2}$ разрывна в каждой точке окружности $x^2+y^2=1$. Эта окружность есть линия разрыва данной функции.

716. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{a-\sqrt{a^2-xy}}{xy}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 1}} \frac{xy}{\sin(xy)}$ 3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{2x^3+3y^2}{x^2+y^2}$.

717. Указать точки или линии разрыва функций:

1) $z=\frac{10x}{(x-1)^2+(y-1)^2}$; 2) $z=\frac{3y}{2x-y}$; 3) $z=\frac{x^2}{x^2-2y^2-4}$.

§ 3. Частные производные функции многих переменных

Функцию $u=f(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)$ можно дифференцировать по каждому из ее аргументов, считая при этом все остальные аргументы постоянными.

Производная от функции $u=f(x, y, z, \ldots, t)$ по x, взятая в предположении, что все остальные аргументы y, z, $\ldots$, t являются постоянными, называется частной производной от u по x

и обозначается $\frac{\partial u}{\partial x}$ или u'_x, т. е.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=u'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)-f(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ t)}{\Delta x}.$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные от функции u по каждому из остальных ее аргументов.

Частные производные функции многих переменных находятся по известным правилам дифференцирования функции одной независимой переменной (гл. II).

718. Найти частные производные от функций:

1) $z=x^3+5xy^2-y^3$; 2) $u=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}-\frac{z}{x}$; 3) $v=\sqrt[x]{e^y}$.

Решение. 1) Считая z функцией только одного аргумента x, по формулам гл. II, находим $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+5y^2$.

Аналогично, считая z функцией только y, получим $\frac{\partial z}{\partial y}=$ $=10xy-3y^2$.

2) Считая u функцией только x, затем только y и только z, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}+\frac{z}{x^2};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{z};\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}-\frac{1}{x}.$$

3) Заменяя корень степенью с дробным показателем и затем дифференцируя по каждой из двух переменных, получим:

$$v=e^{\frac{y}{x}};\quad v'_x=-\frac{y}{x^2}e^{\frac{y}{x}};\quad v'_y=\frac{1}{x}e^{\frac{y}{x}}.$$

719. Вычислить значения частных производных данных функций при указанных значениях аргументов:

1) $f(\alpha,\ \beta)=\cos(m\alpha-n\beta)$; $\alpha=\frac{\pi}{2m}$, $\beta=0$;

2) $z=\ln(x^2-y^2)$; $x=2$, $y=-1$.

Решение. 1) По формулам дифференцирования (гл. II) находим частные производные:

$$f'_\alpha=-m\sin(m\alpha-n\beta);\qquad f'_\beta=n\sin(m\alpha-n\beta).$$

Полагая $\alpha=\frac{\pi}{2m}$, $\beta=0$, получим $f'_\alpha\left(\frac{\pi}{2m},0\right)=-m$; $f'_\beta\left(\frac{\pi}{2m},0\right)=n$.

2) Находим производные, затем вычисляем их частные значения в указанной точке:

$$z'_x=\frac{2x}{x^2-y^2};\quad z'_y=-\frac{2y}{x^2-y^2};\quad z'_x(2;\ -1)=\frac{4}{3};\quad z'_y(2;\ -1)=\frac{2}{3}.$$

720. Проверить, что функция $z=x\ln\frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.

Решение. Тождественно преобразуем данную функцию и находим ее частные производные по x и по y:

$$z=x(\ln y-\ln x);\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\ln y-\ln x-1=\ln\frac{y}{x}-1;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}.$$

Подставляя z, $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в данное уравнение, получим тождество $x\left(\ln\frac{y}{x}-1\right)+y\frac{x}{y}=x\ln\frac{y}{x}$; $0=0$. Это значит, что данная функция удовлетворяет данному уравнению (является его решением).

Найти частные производные от функций:

721. $z=(5x^3y^2+1)^3$. **722.** $r=\sqrt{ax^2-by^2}$.

723. $v=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$. **724.** $p=\arcsin\frac{x}{t}$.

725. $f(m, n)=(2m)^{3n}$; вычислить f'_m и f'_n в точке $A\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$.

726. $p(x, y, z)=\sin^2(3x+2y-z)$; вычислить $p'_x(1;\ -1;\ 1)$, $p'_y(1;\ 1;\ 4)$, $p'_z\left(-\frac{1}{2};\ 0;\ -1\right)$.

727. Проверить, что функция $v=x^y$ удовлетворяет уравнению $\frac{x}{y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial v}{\partial y}=2v$.

728. Проверить, что функция $w=x+\frac{x-y}{y-z}$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=1$.

§ 4. Дифференциалы функции многих переменных

Частным дифференциалом функции $u=f(x, y, \ldots, t)$ *по* x *называется главная часть соответствующего частного приращения* $\Delta_x u=f(x+\Delta x, y, \ldots, t)-f(x, y, \ldots, t)$, *линейная относительно приращения* Δx (или, что то же, дифференциала dx).

Аналогично определяются частные дифференциалы функции u по каждому из остальных ее аргументов. Частные дифференциалы функции u по x, по y, ..., по t обозначаются, соответственно, $d_x u$, $d_y u$, ..., $d_t u$.

Из определения частных производных следует, что

$$d_x u=\frac{\partial u}{\partial x}dx;\quad d_y u=\frac{\partial u}{\partial y}dy;\quad \ldots;\quad d_t u=\frac{\partial u}{\partial t}dt.$$