720. Проверить, что функция $z=x\ln\frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$.

Решение. Тождественно преобразуем данную функцию и находим ее частные производные по x и по y:

$$z=x(\ln y-\ln x);\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\ln y-\ln x-1=\ln\frac{y}{x}-1;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}.$$

Подставляя z, $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в данное уравнение, получим тождество $x\left(\ln\frac{y}{x}-1\right)+y\frac{x}{y}=x\ln\frac{y}{x}$; $0=0$. Это значит, что данная функция удовлетворяет данному уравнению (является его решением).

Найти частные производные от функций:

721. $z=(5x^3y^2+1)^3$. **722.** $r=\sqrt{ax^2-by^2}$.

723. $v=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$. **724.** $p=\arcsin\frac{x}{t}$.

725. $f(m,\ n)=(2m)^{3n}$; вычислить f'_m и f'_n в точке $A\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$.

726. $p(x,\ y,\ z)=\sin^2(3x+2y-z)$; вычислить $p'_x(1;\ -1;\ 1)$, $p'_y(1;\ 1;\ 4)$, $p'_z\left(-\frac{1}{2};\ 0;\ -1\right)$.

727. Проверить, что функция $v=x^y$ удовлетворяет уравнению $\frac{x}{y}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial v}{\partial y}=2v$.

728. Проверить, что функция $w=x+\frac{x-y}{y-z}$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=1$.

§ 4. Дифференциалы функции многих переменных

Частным дифференциалом функции $u=f(x,\ y,\ \ldots,\ t)$ *по* x *называется главная часть соответствующего частного приращения* $\Delta_x u=f(x+\Delta x,\ y,\ \ldots,\ t)-f(x,\ y,\ \ldots,\ t)$, *линейная относительно приращения* Δx (или, что то же, дифференциала dx).

Аналогично определяются частные дифференциалы функции u по каждому из остальных ее аргументов. Частные дифференциалы функции u по x, по y, ..., по t обозначаются, соответственно, d_xu, d_yu, ..., d_tu.

Из определения частных производных следует, что

$$d_xu=\frac{\partial u}{\partial x}dx;\quad d_yu=\frac{\partial u}{\partial y}dy;\quad \ldots;\quad d_tu=\frac{\partial u}{\partial t}dt.$$

Полным дифференциалом функции $u=f(x, y, \ldots, t)$ называется главная часть ее полного приращения

$$\Delta u = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ \ldots,\ t+\Delta t)-f(x,\ y,\ \ldots,\ t),$$

линейная относительно приращений Δx, Δy, ..., Δt (или, что то же, дифференциалов dx, dy, ..., dt).

Полный дифференциал du функции u (если он существует) равен сумме всех ее частных дифференциалов

$$du = d_x u + d_y u + \ldots + d_t u = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \ldots + \frac{\partial u}{\partial t}dt.$$

Функция $u(x, y, \ldots, t)$ называется дифференцируемой в точке $(x, y, \ldots, t)$, если в этой точке она имеет полный дифференциал.

При достаточно малых (по абсолютному значению) приращениях аргументов полное приращение функции можно с как угодно малой относительной погрешностью заменить ее полным дифференциалом

$$\Delta u \approx du.^*$$

Вычисление полного дифференциала функции значительно проще, чем вычисление ее полного приращения. Поэтому указанное приближенное равенство используется для приближенных вычислений, простейшие из которых разъясняются в задаче 731.

729. Найти полные дифференциалы функций:

1) $z=3x^2y^5$; 2) $u=2x^{yz}$; 3)* $p=\arccos\frac{1}{uv}$.

Решение.

1) а. Находим частные производные данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=6xy^5; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=15x^2y^4.$$

б. Умножая частные производные на дифференциалы соответствующих аргументов, получим частные дифференциалы функции:

$$d_x z = 6xy^5\,dx; \quad d_y z = 15x^2y^4\,dy.$$

в. Искомый полный дифференциал функции найдем как сумму ее частных дифференциалов: $dz=d_x z+d_y z=6xy^5\,dx+15x^2y^4\,dy$.

2) Следуя указанному плану, последовательно находим:

а) $u'_x=2yzx^{yz-1}$; $u'_y=2zx^{yz}\ln x$; $u'_z=2yx^{yz}\ln x$;

б) $d_x u=2yzx^{yz-1}\,dx$; $d_y u=2zx^{yz}\ln x\,dy$; $d_z u=2yx^{yz}\ln x\,dz$;

в) $du=2x^{yz}\left(\frac{yz}{x}dx+z\ln x\,dy+y\ln x\,dz\right)$.

3) * а) $\frac{\partial p}{\partial u}=\frac{|uv|}{u^2v\sqrt{u^2v^2-1}}$; $\frac{\partial p}{\partial v}=\frac{|uv|}{uv^2\sqrt{u^2v^2-1}}$;

* Исключая точки, где $u'_x=u'_y=\ldots=u'_t=0$.

б) $d_u p = \frac{|v|\,du}{v|u|\sqrt{u^2v^2-1}}$; $d_v p = \frac{|u|\,dv}{u|v|\sqrt{u^2v^2-1}}$;

в) $dp = \frac{1}{\sqrt{u^2v^2-1}}\left(\frac{|v|\,du}{v|u|} + \frac{|u|\,dv}{u|v|}\right)$.

730. Вычислить значение полного дифференциала функции $z = \operatorname{arcctg}\frac{x}{y}$ при $x=1$, $y=3$, $dx=0{,}01$, $dy=-0{,}05$.

Решение. Находим частные производные, затем частные дифференциалы и полный дифференциал данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2};\quad dz = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}.$$

Подставляя заданные значения независимых переменных x, y, dx и dy, функцией которых является полный дифференциал dz, получим

$$dz = \frac{1\cdot(-0{,}05) - 3\cdot 0{,}01}{1+9} = -0{,}008.$$

731. Вычислить приближенное значение:

1) $1{,}08^{3{,}96}$; 2) $\frac{\sin 1{,}49\cdot \operatorname{arctg} 0{,}07}{2^{2{,}95}}$.

Решение. Если требуется вычислить значение функции $f(x, y, \ldots, t)$ в точке $M_1(x_1, y_1, \ldots, t_1)$ и если проще вычислить значения этой функции и ее частных производных в точке $M_0(x_0, y_0, \ldots, t_0)$, то при достаточно малых, по абсолютной величине, значениях разностей $x_1 - x_0 = dx$, $y_1 - y_0 = dy$, $\ldots$, $t_1 - t_0 = dt$ можно заменить полное приращение функции ее полным дифференциалом:

$$f(M_1) - f(M_0) \approx f'_x(M_0)\,dx + f'_y(M_0)\,dy + \ldots + f'_t(M_0)\,dt,$$

и отсюда найти приближенное значение искомой величины по формуле

$$f(M_1) \approx f(M_0) + f'_x(M_0)\,dx + f'_y(M_0)\,dy + \ldots + f'_t(M_0)\,dt. \quad (a)$$

1) Полагая, что $1{,}08^{3{,}96}$ есть частное значение функции $f(x, y) = x^y$ в точке M_1 (1,08; 3,96) и что вспомогательная точка будет $M_0(1;\ 4)$, получим

$$f(M_0) = 1^4 = 1;\ f'_x(M_0) = yx^{y-1}\Big|_{\substack{x=1\\y=4}} = 4;\ f'_y(M_0) = x^y \ln x\Big|_{\substack{x=1\\y=4}} = 0;$$

$$dx = 1{,}08 - 1 = 0{,}08;\ dy = 3{,}96 - 4 = -0{,}04.$$

Подставляя в формулу (a), найдем

$$1{,}08^{3{,}96} \approx f(M_0) + f'_x(M_0)\,dx + f'_y(M_0)\,dy = 1 + 4\cdot 0{,}08 = 1{,}32.$$

2) Пусть $\frac{\sin 1{,}49\cdot\operatorname{arc\,tg} 0{,}07}{2^{2{,}95}}$ есть частное значение функции трех переменных $\varphi(x, y, z)=2^x\sin y\operatorname{arc\,tg} z$ в точке $M_1(-2{,}95;\ 1{,}49;\ 0{,}07)$ и пусть вспомогательная точка будет $M_0\left(-3;\ \frac{\pi}{2};\ 0\right)$. Тогда $dx=-2{,}95-(-3)=0{,}05$; $dy=1{,}49-1{,}57=-0{,}08$; $dz=0{,}07$;

$\varphi(M_0)=2^{-3}\sin\frac{\pi}{2}\operatorname{arc\,tg} 0=0$; $\varphi'_x(M_0)=2^x\ln 2\cdot\sin y\operatorname{arc\,tg} z\,|_{M_0}=0$;

$$\varphi'_y(M_0)=2^x\cos y\operatorname{arc\,tg} z\,|_{M_0}=0;\quad \varphi'_z(M_0)=\left.\frac{2^x\sin y}{1+z^2}\right|_{M_0}=2^{-3}.$$

Подставляя в формулу (a), получим

$$\frac{\sin 1{,}49\cdot\operatorname{arc\,tg} 0{,}07}{2^{2{,}95}}\approx 2^{-3}\cdot 0{,}07\approx 0{,}01.$$

Найти полные дифференциалы функций:

732. $z=y\ln 2x$.

733. $u=\sin^2 t\cos^2 x$.

734. $v=\frac{xy}{z}$.

735. $f(m, n, p)=e^{am}\cos\frac{bn}{p}$.

736. Вычислить значение полного дифференциала функции:

1) $z=\frac{x}{x-y}$ при $x=2$, $y=1$, $dx=-\frac{1}{3}$, $dy=\frac{1}{2}$;

2) $f(x, y, z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ при перемещении точки $M(x, y, z)$ из положения $M_0(10;\ -10;\ 5)$ в положение $M_1(9;\ -11;\ 6)$.

737. Найти приближенное значение $1{,}94^2e^{0{,}12}$, исходя из значения функции $f(x, y)=x^2e^y$ в точке $M_0(2;\ 0)$ и заменяя ее полное приращение полным дифференциалом*.

738. Найти приближенное значение $\sin 1{,}59\operatorname{tg} 3{,}09$, исходя из значения функции $z=\sin x\operatorname{tg} y$ в точке $M_0\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ и заменяя ее приращение дифференциалом*.

739. Найти приближенное значение $2{,}68^{\sin 0{,}05}$, исходя из значения функции $z=x^{\sin y}$ в точке $M_0(e,\ 0)$ и заменяя ее приращение дифференциалом.*

§ 5. Дифференцирование сложных функций

Переменная z называется сложной функцией от независимых переменных $x, y, \ldots, t$, если она задана через посредство промежуточных аргументов $u, v, \ldots, w$:

$$z=F(u, v, \ldots, w),$$

* Все вычисления выполнять с точностью до 0,01.