2) Пусть $\frac{\sin 1{,}49 \cdot \operatorname{arc\,tg} 0{,}07}{2^{2{,}95}}$ есть частное значение функции трех переменных $\varphi(x, y, z) = 2^x \sin y \operatorname{arc\,tg} z$ в точке $M_1(-2{,}95;\ 1{,}49;\ 0{,}07)$ и пусть вспомогательная точка будет $M_0\left(-3;\ \frac{\pi}{2};\ 0\right)$. Тогда $dx = -2{,}95-(-3) = 0{,}05$; $dy = 1{,}49 - 1{,}57 = -0{,}08$; $dz = 0{,}07$;

$$\varphi(M_0) = 2^{-3} \sin \frac{\pi}{2} \operatorname{arc\,tg} 0 = 0; \quad \varphi'_x(M_0) = 2^x \ln 2 \cdot \sin y \operatorname{arc\,tg} z \,|_{M_0} = 0;$$

$$\varphi'_y(M_0) = 2^x \cos y \operatorname{arc\,tg} z \,|_{M_0} = 0; \quad \varphi'_z(M_0) = \left.\frac{2^x \sin y}{1+z^2}\right|_{M_0} = 2^{-3}.$$

Подставляя в формулу ($a$), получим

$$\frac{\sin 1{,}49 \cdot \operatorname{arc\,tg} 0{,}07}{2^{2{,}95}} \approx 2^{-3} \cdot 0{,}07 \approx 0{,}01.$$

Найти полные дифференциалы функций:

**732.** $z = y \ln 2x$.

**733.** $u = \sin^2 t \cos^2 x$.

**734.** $v = \frac{xy}{z}$.

**735.** $f(m, n, p) = e^{am} \cos \frac{bn}{p}$.

**736.** Вычислить значение полного дифференциала функции:

1) $z = \frac{x}{x-y}$ при $x = 2$, $y = 1$, $dx = -\frac{1}{3}$, $dy = \frac{1}{2}$;

2) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ при перемещении точки $M(x, y, z)$ из положения $M_0(10;\ -10;\ 5)$ в положение $M_1(9;\ -11;\ 6)$.

**737.** Найти приближенное значение $1{,}94^2 e^{0{,}12}$, исходя из значения функции $f(x, y) = x^2 e^y$ в точке $M_0(2;\ 0)$ и заменяя ее полное приращение полным дифференциалом*.

**738.** Найти приближенное значение $\sin 1{,}59 \operatorname{tg} 3{,}09$, исходя из значения функции $z = \sin x \operatorname{tg} y$ в точке $M_0\left(\frac{\pi}{2},\ \pi\right)$ и заменяя ее приращение дифференциалом*.

**739.** Найти приближенное значение $2{,}68^{\sin 0{,}05}$, исходя из значения функции $z = x^{\sin y}$ в точке $M_0(e,\ 0)$ и заменяя ее приращение дифференциалом.*

## § 5. Дифференцирование сложных функций

*Переменная $z$ называется сложной функцией от независимых переменных $x, y, \ldots, t$, если она задана через посредство промежуточных аргументов $u, v, \ldots, w$:*

$$z = F(u, v, \ldots, w),$$

---

* Все вычисления выполнять с точностью до 0,01.

где

$$u=f(x, y, \ldots, t), \quad v=\varphi(x, y, \ldots, t), \ldots, \quad w=\psi(x, y, \ldots, t).$$

*Частная производная сложной функции по одной из независимых переменных равна сумме произведений ее частных производных по промежуточным аргументам на частные производные этих аргументов по независимой переменной:*

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\ldots+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y};$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}+\ldots+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}. \qquad (*)$$

Если, в частности, все аргументы $u, v, \ldots, w$ будут функциями от одной независимой переменной $x$, то и $z$ будет сложной функцией только от $x$. Производная такой сложной функции (от одной независимой переменной) называется полной производной и определяется формулой

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}+\ldots+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx}. \qquad (**)$$

(Она получается из формулы для полного дифференциала функции $z(u, v, \ldots, w)$ путем деления на $dx$.)

**740.** Найти производные сложных функций:

1) $y=u^2e^v$, $u=\sin x$, $v=\cos x$; 2) $p=u^v$, $u=\ln(x-y)$, $v=e^{\frac{x}{y}}$;

3) $z=x\sin v\cos w$, $v=\ln(x^2+1)$, $w=-\sqrt{1-x^2}$.

Решение. 1) Здесь $y$ есть сложная функция одной независимой переменной $x$. Пользуясь формулой (**), получим

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{dx}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{dx}=2ue^v\cos x+u^2e^v(-\sin x).$$

2) $p$ есть сложная функция двух переменных $x$ и $y$. По общим формулам (*), найдем

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=vu^{v-1}\cdot\frac{1}{x-y}+u^v\ln u\cdot\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}};$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=vu^{v-1}\cdot\frac{1}{y-x}+u^v\ln u\cdot\left(-\frac{x}{y^2}e^{\frac{x}{y}}\right).$$

3) $z$ есть сложная функция одной переменной $x$ вида: $z=F(x, v, w)$, $v=f(x)$, $w=\varphi(x)$. Формулу для полной производной такой функции получим, полагая $u=x$ в формуле (**):

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dx}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{dx}.$$

Согласно этой формуле, найдем

$$\frac{dz}{dx}=\sin v\cos w+x\cos v\cos w\cdot\frac{2x}{x^2+1}-x\sin v\sin w\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

**741.** $u=e^{z-2y}$, $z=\sin x$, $y=x^3$; $\frac{du}{dx}$?

**742.** $z=\ln(e^x+e^t)$; найти 1) $\frac{\partial z}{\partial t}$, 2) $\frac{dz}{dt}$, если $x=t^3$.

**743.** $p=u^2\ln v$, $u=\frac{x}{y}$, $v=3x-2y$; $\frac{\partial p}{\partial x}$? $\frac{\partial p}{\partial y}$?

**744.** $f(x)=\arcsin\frac{x}{y}$, $y=\sqrt{x^2+1}$; $\frac{df}{dx}$?

## § 6. Дифференцирование неявных функций

*Переменная $u$ называется неявной функцией от независимых переменных $x, y, \ldots, t$, если она задана уравнением $f(x, y, \ldots, t, u)=0$, которое не разрешено относительно $u$.* При этом, если функция $f(x, y, \ldots, t, u)$ и ее частные производные $f'_x$, $f'_y$, $\ldots$, $f'_t$, $f'_u$ определены и непрерывны в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, \ldots, t_0, u_0)$ и вблизи нее и если $f(M_0)=0$, а $f'_u(M_0)\neq 0$, то уравнение $f(x, y, \ldots, t, u)=0$ вблизи точки $P(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ и в самой этой точке определяет $u$ как однозначную, непрерывную и дифференцируемую функцию от $x, y, \ldots, t$.

Производные неявной функции $u$, заданной уравнением $f(x, y, \ldots, t, u)=0$, при соблюдении указанных условий определяются формулами

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{f'_x}{f'_u};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{f'_y}{f'_u};\quad \ldots;\quad \frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{f'_t}{f'_u}. \qquad \text{(A)}$$

В частности, если $y$ есть неявная функция одной переменной $x$, заданная уравнением $f(x, y)=0$, то

$$\frac{dy}{dx}=y'=-\frac{f'_x}{f'_y}. \qquad \text{(Б)}$$

**745.** Найти производную неявной функции $y$, заданной уравнением: 1) $x^2+y^2+2x-6y+2=0$; 2) $x^y=y^x$, и вычислить ее значение при $x=1$.

Решение. 1) Обозначив левую часть данного уравнения через $f(x, y)$, найдем частные производные $f'_x=2x+2$, $f'_y=2y-6$ и, подставив их в формулу (Б), получим $y'=\frac{x+1}{3-y}$.

Далее, подставляя в исходное уравнение $x=1$, найдем два соответствующих значения функции $y_1=1$ и $y_2=5$. Поэтому при $x=1$ и производная имеет два значения: $y'_1(1)=1$, $y'_2(1)=-1$.