Согласно этой формуле, найдем

$$\frac{dz}{dx}=\sin v\cos w+x\cos v\cos w\cdot\frac{2x}{x^2+1}-x\sin v\sin w\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

741. $u=e^{z-2y}$, $z=\sin x$, $y=x^3$; $\frac{du}{dx}$?

742. $z=\ln(e^x+e^t)$; найти 1) $\frac{\partial z}{\partial t}$, 2) $\frac{dz}{dt}$, если $x=t^3$.

743. $p=u^2\ln v$, $u=\frac{x}{y}$, $v=3x-2y$; $\frac{\partial p}{\partial x}$? $\frac{\partial p}{\partial y}$?

744. $f(x)=\arcsin\frac{x}{y}$, $y=\sqrt{x^2+1}$; $\frac{df}{dx}$?

§ 6. Дифференцирование неявных функций

Переменная u называется неявной функцией от независимых переменных $x, y, \ldots, t$, если она задана уравнением $f(x, y, \ldots, t, u)=0$, которое не разрешено относительно u. При этом, если функция $f(x, y, \ldots, t, u)$ и ее частные производные f'_x, f'_y, …, f'_t, f'_u определены и непрерывны в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, \ldots, t_0, u_0)$ и вблизи нее и если $f(M_0)=0$, а $f'_u(M_0)\neq 0$, то уравнение $f(x, y, \ldots, t, u)=0$ вблизи точки $P(x_0, y_0, \ldots, t_0)$ и в самой этой точке определяет u как однозначную, непрерывную и дифференцируемую функцию от $x, y, \ldots, t$.

Производные неявной функции u, заданной уравнением $f(x, y, \ldots, t, u)=0$, при соблюдении указанных условий определяются формулами

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{f'_x}{f'_u};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{f'_y}{f'_u};\quad \ldots;\quad \frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{f'_t}{f'_u}. \qquad \text{(A)}$$

В частности, если y есть неявная функция одной переменной x, заданная уравнением $f(x, y)=0$, то

$$\frac{dy}{dx}=y'=-\frac{f'_x}{f'_y}. \qquad \text{(Б)}$$

745. Найти производную неявной функции y, заданной уравнением: 1) $x^2+y^2+2x-6y+2=0$; 2) $x^y=y^x$, и вычислить ее значение при $x=1$.

Решение. 1) Обозначив левую часть данного уравнения через $f(x, y)$, найдем частные производные $f'_x=2x+2$, $f'_y=2y-6$ и, подставив их в формулу (Б), получим $y'=\frac{x+1}{3-y}$.

Далее, подставляя в исходное уравнение $x=1$, найдем два соответствующих значения функции $y_1=1$ и $y_2=5$. Поэтому при $x=1$ и производная имеет два значения: $y'_1(1)=1$, $y'_2(1)=-1$.

2) Преобразовав данное уравнение к виду $x^y - y^x = 0$, согласно формуле (Б), получим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(x^y - y^x)'_x}{(x^y - y^x)'_y} = \frac{y^x \ln y - yx^{y-1}}{x^y \ln x - xy^{x-1}}.$$

При $x = 1$ из данного уравнения определяем $y = 1$. Искомое значение $y'(1) = 1$.

746. Найти частные производные неявной функции $z(x, y)$, заданной уравнением: 1) $x^2 + y^2 + z^2 - z = 0$; 2) $ax + by - cz = k\cos(ax + by - cz)$.

Решение. 1) Обозначив левую часть уравнения через $\varphi(x, y, z)$ и пользуясь формулами (А), получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_z} = -\frac{2x}{2z-1}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\varphi'_y}{\varphi'_z} = -\frac{2y}{2z-1}.$$

2) Преобразуя уравнение к виду $ax + by - cz - k\cos(ax + by - cz) = 0$ и обозначая его левую часть через $F(x, y, z)$ по формулам (А) найдем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{a + ak\sin(ax + by - cz)}{-c - ck\sin(ax + by - cz)} = \frac{a}{c};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{b + bk\sin(ax + by - cz)}{-c - ck\sin(ax + by - cz)} = \frac{b}{c}.$$

Найти производные неявных функций:

747. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$; $\frac{dy}{dx}$? **748.** $uv = -\ln(uv)$; $\frac{dv}{du}$?

749. $y^2 = \frac{x+y}{x-y}$; $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=2}$? **750.** $x\sin y + \cos 2y = \cos y$; $y'|_{y=\frac{\pi}{2}}$?

751. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 1$; z'_x? z'_y? **752.** $e^u = \cos v \cos t$; $\frac{\partial u}{\partial v}$? $\frac{\partial u}{\partial t}$?

753. Проверить, что функция $4\sin(3x + 2y + 5z) = 3x + 2y + 5z$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + 1 = 0$.

§ 7. Частные производные высших порядков

Функцию многих аргументов $u = f(x, y, \ldots, t)$ можно дифференцировать по каждому аргументу. Полученные частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, ..., $\frac{\partial u}{\partial t}$ (первого порядка) обычно зависят от тех же аргументов и каждую из них также можно дифференцировать по каждому аргументу.