2) Преобразовав данное уравнение к виду $x^y - y^x = 0$, согласно формуле (Б), получим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(x^y - y^x)'_x}{(x^y - y^x)'_y} = \frac{y^x \ln y - yx^{y-1}}{x^y \ln x - xy^{x-1}}.$$

При $x = 1$ из данного уравнения определяем $y = 1$. Искомое значение $y'(1) = 1$.

746. Найти частные производные неявной функции $z(x, y)$, заданной уравнением: 1) $x^2 + y^2 + z^2 - z = 0$; 2) $ax + by - cz = k\cos(ax + by - cz)$.

Решение. 1) Обозначив левую часть уравнения через $\varphi(x, y, z)$ и пользуясь формулами (А), получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_z} = -\frac{2x}{2z-1}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\varphi'_y}{\varphi'_z} = -\frac{2y}{2z-1}.$$

2) Преобразуя уравнение к виду $ax + by - cz - k\cos(ax + by - cz) = 0$ и обозначая его левую часть через $F(x, y, z)$ по формулам (А) найдем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{a + ak\sin(ax + by - cz)}{-c - ck\sin(ax + by - cz)} = \frac{a}{c};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{b + bk\sin(ax + by - cz)}{-c - ck\sin(ax + by - cz)} = \frac{b}{c}.$$

Найти производные неявных функций:

747. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$; $\frac{dy}{dx}$? **748.** $uv = -\ln(uv)$; $\frac{dv}{du}$?

749. $y^2 = \frac{x+y}{x-y}$; $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=2}$? **750.** $x\sin y + \cos 2y = \cos y$; $y'|_{y=\frac{\pi}{2}}$?

751. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 1$; z'_x? z'_y? **752.** $e^u = \cos v \cos t$; $\frac{\partial u}{\partial v}$? $\frac{\partial u}{\partial t}$?

753. Проверить, что функция $4\sin(3x + 2y + 5z) = 3x + 2y + 5z$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + 1 = 0$.

§ 7. Частные производные высших порядков

Функцию многих аргументов $u = f(x, y, \ldots, t)$ можно дифференцировать по каждому аргументу. Полученные частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, ..., $\frac{\partial u}{\partial t}$ (первого порядка) обычно зависят от тех же аргументов и каждую из них также можно дифференцировать по каждому аргументу.

Частные производные от частных производных первого порядка называются частными производными второго порядка. Они обозначаются:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=u''_{xx}\,; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=u''_{xy}\,;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=u''_{yx}\,; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u''_{yy}\,;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Частные производные от частных производных второго порядка называются частными производными третьего порядка. Они обозначаются:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=f'''_{xxx}\,; \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}=f'''_{xxy}\,;$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)=\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}=f'''_{xyy}\,; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)=\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial x}=f'''_{xyx}\,.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные четвертого, пятого и других высших порядков.

Частные производные высших порядков, отличающиеся только последовательностью дифференцирования, равны, если они непрерывны. Например,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}\,; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}=\frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial x^2}=\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial x}\,.$$

Согласно этому положению, функция двух переменных $z=f(x,y)$ имеет три различных частных производных второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,;$$

четыре различных частных производных третьего порядка

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\,,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}\,,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}\,,\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$$

и вообще $n+1$ различных частных производных n-го порядка.

Частные производные высших порядков находятся путем последовательного нахождения одной производной вслед за другой по правилам дифференцирования функции одной переменной (гл. II).

754. Найти частные производные второго порядка следующих функций: 1) $z=x^3-2x^2y+3y^2$; 2) $u\ (x,\ y,\ t)=e^{xyt}$.

Решение. 1) Сначала находим частные производные первого порядка, затем искомые частные производные второго порядка:

$$z'_x=3x^2-4xy;\quad z'_y=-2x^2+6y;$$

$$z''_{xx}=6x-4y;\quad z''_{xy}=z''_{yx}=-4x;\quad z''_{yy}=6.$$

2) Последовательно дифференцируя, находим

$$u'_x = yte^{xyt};\quad u'_y = xte^{xyt};\quad u'_t = xye^{xyt};\quad u''_{xx} = y^2t^2e^{xyt};$$
$$u''_{xy} = u''_{yx} = t(1+xyt)e^{xyt};\quad u''_{xt} = u''_{tx} = y(1+xyt)e^{xyt};$$
$$u''_{yt} = u''_{ty} = x(1+xyt)e^{xyt};\quad u''_{yy} = x^2t^2e^{xyt};\quad u''_{tt} = x^2y^2e^{xyt}.$$

755. Проверить, что $z''_{xy} = z''_{yx}$ для функций: 1) $z = \cos(ax - by)$, 2) $z = \ln(x^2 + y^2 + 1)$.

Решение. 1) Дифференцируя z по x, найдем $z'_x = -a\sin(ax - by)$; дифференцируя z'_x по y, найдем $(z'_x)'_y = z''_{xy} = ab\cos(ax - by)$.

Дифференцируем в другом порядке: сначала найдем производную от z по y, $z'_y = b\sin(ax - by)$, затем производную от z'_y по x, $(z'_y)'_x = z''_{yx} = ab\cos(ax - b)$.

Сопоставляя полученные результаты, заключаем, что для данной функции $z''_{xy} = z''_{yx}$.

2) Последовательно дифференцируя, находим z''_{xy}, затем z''_{yx}:

$$z'_x = \frac{2x}{x^2+y^2+1};\quad z''_{xy} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2+1)^2};$$
$$z'_y = \frac{2y}{x^2+y^2+1};\quad z''_{yx} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2+1)^2}.$$

Следовательно, и для этой функции $z''_{xy} = z''_{yx}$.

756. Проверить, что функция $z = 2\cos^2\left(y - \frac{x}{2}\right)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0$.

Решение. Найдем частные производные второго порядка, содержащиеся в данном уравнении:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\cdot 2\cos\left(y - \frac{x}{2}\right)\cdot\left[-\sin\left(y - \frac{x}{2}\right)\right]\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \sin(2y - x);$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\cos(2y - x);\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 2\cos(2y - x).$$

Подставляя их в данное уравнение, получим тождество: $0 = 0$.

757. Найти частные производные второго порядка следующих функций: 1) $z = \frac{x^2}{2y-3}$; 2) $u = e^x\ln y + \sin y\ln x$.

758. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}$, если $u = \ln(x + y)$.

759. Найти u'''_{xyy}, если $u = \sin(xy)$.

760. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$, если $u = 2^{xyz}$.

761. Проверить, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ для функций:

1) $z = \ln\frac{x}{y}$; 2) $z = \operatorname{arcctg}(x + 2y)$.

762. Проверить, что $\frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^3 v}{\partial y\,\partial x^2}$ для функции $v=\frac{t}{xyz}$.

763. Проверить, что функция $p=\ln(x^2+y^2)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=0$.

764. Проверить, что функция $u=e^{\frac{x}{y}}$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=0$.

§ 8. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Если поверхность задана уравнением $F(x, y, z)=0$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на ней, то:

касательная плоскость к поверхности в точке M_0 определяется уравнением

$$(x-x_0)F'_x(M_0)+(y-y_0)F'_y(M_0)+(z-z_0)F'_z(M_0)=0; \qquad (\mathrm{I})$$

нормаль к поверхности в точке M_0 (прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно к касательной плоскости) определяется уравнениями

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}. \qquad (\mathrm{II})$$

Точки поверхности $F(x, y, z)=0$, где одновременно обращаются в нуль все частные производные первого порядка F'_x, F'_y, F'_z, называются особыми. В таких точках поверхность не имеет ни касательной плоскости, ни нормали.

765. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к эллиптическому параболоиду $z=2x^2+y^2$ в точке А (1; −1; 3).

Решение. Преобразуем уравнение поверхности к виду $2x^2+y^2-z=0$ и, обозначив его левую часть через $F(x, y, z)$, найдем частные производные $F'_x=4x$, $F'_y=2y$, $F'_z=-1$, вычислим их числовые значения в данной точке $F'_x(A)=4$, $F'_y(A)=-2$, $F'_z(A)=-1$ и, подставляя в общие уравнения (I) и (II), получим:

уравнение касательной плоскости $4(x-1)-2(x+1)-(z-3)=0$ или $4x-2y-z-3=0$;

уравнения нормали $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$.

766. На сфере $x^2+y^2+z^2=676$ найти точки, где касательная плоскость параллельна плоскости $3x-12y+4z=0$.

Решение. Пользуясь общим уравнением (I), составим уравнение касательной плоскости к данной сфере в ее точке (x_0, y_0, z_0):

$$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0$$