762. Проверить, что $\frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^3 v}{\partial y\,\partial x^2}$ для функции $v=\frac{t}{xyz}$.

763. Проверить, что функция $p=\ln(x^2+y^2)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}=0$.

764. Проверить, что функция $u=e^{\frac{x}{y}}$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=0$.

§ 8. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Если поверхность задана уравнением $F(x, y, z)=0$ и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит на ней, то:

касательная плоскость к поверхности в точке M_0 определяется уравнением

$$(x-x_0)F'_x(M_0)+(y-y_0)F'_y(M_0)+(z-z_0)F'_z(M_0)=0; \qquad \text{(I)}$$

нормаль к поверхности в точке M_0 (прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно к касательной плоскости) определяется уравнениями

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}. \qquad \text{(II)}$$

Точки поверхности $F(x, y, z)=0$, где одновременно обращаются в нуль все частные производные первого порядка F'_x, F'_y, F'_z, называются особыми. В таких точках поверхность не имеет ни касательной плоскости, ни нормали.

765. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к эллиптическому параболоиду $z=2x^2+y^2$ в точке A $(1;\ -1;\ 3)$.

Решение. Преобразуем уравнение поверхности к виду $2x^2+y^2-z=0$ и, обозначив его левую часть через $F(x, y, z)$, найдем частные производные $F'_x=4x$, $F'_y=2y$, $F'_z=-1$, вычислим их числовые значения в данной точке $F'_x(A)=4$, $F'_y(A)=-2$, $F'_z(A)=-1$ и, подставляя в общие уравнения (I) и (II), получим:

уравнение касательной плоскости $4(x-1)-2(x+1)-(z-3)=0$ или $4x-2y-z-3=0$;

уравнения нормали $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$.

766. На сфере $x^2+y^2+z^2=676$ найти точки, где касательная плоскость параллельна плоскости $3x-12y+4z=0$.

Решение. Пользуясь общим уравнением (I), составим уравнение касательной плоскости к данной сфере в ее точке (x_0, y_0, z_0):

$$x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0$$

или

$$x_0x+y_0y+z_0z=x_0^2+y_0^2+z_0^2=676.$$

Согласно условию параллельности двух плоскостей, чтобы касательная плоскость была параллельна данной плоскости, в их уравнениях коэффициенты при текущих координатах должны быть пропорциональны: $\frac{x_0}{3}=\frac{y_0}{-12}=\frac{z_0}{4}=\lambda$.

Определив отсюда $x_0=3\lambda$, $y_0=-12\lambda$, $z_0=4\lambda$ и подставляя в уравнение сферы, находим два значения коэффициента пропорциональности: $\lambda=\pm 2$ и две искомых точки на сфере $(6;\ -24;\ 8)$ и $(-6;\ 24;\ -8)$, в которых касательная плоскость параллельна данной плоскости.

767. Показать, что касательные плоскости к поверхности $xyz=m^3$ образуют с координатными плоскостями тетраэдр постоянного объема.

Решение. Уравнение касательной плоскости к данной поверхности в точке $P(x_0,\ y_0,\ z_0)$ будет $y_0z_0x+x_0z_0y+x_0y_0z=3x_0y_0z_0$. Она отсекает на осях координат отрезки $a=3x_0$, $b=3y_0$, $c=3z_0$. Эти отрезки являются взаимно перпендикулярными ребрами тетраэдра, образованного касательной плоскостью и плоскостями координат. Приняв одно из этих ребер за высоту тетраэдра, найдем, что его объем $V=\frac{1}{6}abc=\frac{9}{2}x_0y_0z_0=\frac{9}{2}m^3$ (так как точка P лежит на данной поверхности) не зависит от координат точки касания P. Из этого следует, что различные касательные плоскости к данной поверхности образуют с плоскостями координат тетраэдр постоянного (одинакового) объема.

Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности:

768. $x^2+2y^2+3z^2=6$ в точке $(1;\ -1;\ 1)$.

769. $2z=x^2-y^2$ в точке $(3;\ 1;\ 4)$.

770. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ в точках $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и $(a,\ b,\ c)$.

771. Найти касательные плоскости к эллипсоиду $4x^2+4y^2+z^2=4$, параллельные плоскости $12x-3y+2z=0$.

772. Найти уравнения касательных плоскостей к параболоиду $4z=x^2+y^2$ в точках пересечения его с прямой $x=y=z$.

773. Проверить, что поверхности $x^2-xy-8x+z+5=0$ и $4+x+2y=\ln z$ касаются друг друга, т. е. имеют общую касательную плоскость, в точке $(2;\ -3;\ 1)$.