§ 9. Экстремум функции многих переменных

Значение функции $f(M)$ в точке M_0 называется максимумом (минимумом), если оно является наибольшим (наименьшим) по сравнению с ее значениями во всех достаточно близких точках.

Функция многих переменных может иметь максимум или минимум (экстремум) только в точках, лежащих внутри области определения функции, в которых все ее частные производные первого порядка равны нулю или не существуют *. Такие точки называются критическими.

Критическая точка M_0 будет точкой экстремума функции $f(M)$, если для всех точек M, достаточно близких к M_0 (в окрестности M_0), приращение функции $\Delta f = f(M) - f(M_0)$ не изменяет знака. При этом, если Δf сохраняет положительный знак, то M_0 есть точка минимума, а если Δf сохраняет отрицательный знак, то M_0 есть точка максимума функции.

Для функции двух переменных $f(x, y)$ вместо исследования знака Δf можно исследовать каждую критическую точку M_0, в которой функция дважды дифференцируема, по знаку определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2,$$

где

$$A = f''_{xx}(M_0), \quad B = f''_{xy}(M_0), \quad C = f''_{yy}(M_0).$$

При этом:

1) если $\Delta > 0$, то M_0 есть точка экстремума: при $A < 0$ (или $C < 0$) точка максимума, а при $A > 0$ (или $C > 0$) точка минимума;

2) если $\Delta < 0$, то в точке M_0 нет экстремума;

√ 3) если $\Delta = 0$, то для решения вопроса о наличии или отсутствии экстремума в точке M_0 требуется дальнейшее исследование, например по знаку приращения Δf вблизи этой точки.

Условия 1) и 2) являются достаточными условиями наличия или отсутствия экстремума.

774. Найти экстремумы функций:

1) $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$; 2) $u = x^3 + y^2 - 3x + 4\sqrt{y^5}$;

3) $v = (x-y)^2 + (y-1)^3$; 4) $w = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}}$.

Решение. 1) Находим частные производные 1-го порядка z'_x и z'_y и критические точки, в которых они равны нулю или не существуют и которые лежат внутри области опре-

---

* Это необходимые условия экстремума (но недостаточные, они могут выполняться и в точках, где нет экстремума).

деления функции: $z'_x = 3x^2 - 6y$; $z'_y = 24y^2 - 6x$. Решая систему уравнений $z'_x = 0$, $z'_y = 0$, найдем две точки: $M_1(0; 0)$ и $M_2\left(1; \frac{1}{2}\right)$. Обе точки являются критическими, так как функция z определена на всей плоскости xOy. Других критических точек нет, так как z'_x и z'_y существуют при любых значениях x и y.

Далее исследуем критические точки M_1 и M_2 по знаку определителя Δ, составленного из частных производных второго порядка: $z''_{xx} = A = 6x$; $z''_{xy} = B = -6$; $z''_{yy} = C = 48y$.

Для точки M_1 получим $A = 0$, $B = -6$, $C = 0$ и $\Delta(M_1) = AC - B^2 < 0$. Следовательно, согласно достаточному условию 2), в точке M_1 нет экстремума.

Для точки M_2 имеем $A = 6$, $B = -6$, $C = 24$ и $\Delta(M_2) > 0$. Согласно достаточному условию 1), M_2 есть точка минимума. $z_{\min} = z(M_2) = 4$.

2) Ищем критические точки $u'_x = 3x^2 - 3$; $u'_y = 2y + 2\sqrt{y^3}$. Из системы уравнений $u'_x = 0$, $u'_y = 0$ найдем точки $P_1(1; 0)$ и $P_2(-1; 0)$. Эти точки принадлежат области определения исследуемой функции: $-\infty < x < +\infty$, $0 \leqslant y < +\infty$ (которая представляет половину плоскости xOy, лежащую выше оси Ox, включая и ось Ox), но они расположены не внутри этой области, а на ее границе $y = 0$. Поэтому точки P_1 и P_2 не являются критическими. Частные производные u'_x и u'_y существуют во всей области определения функции u. Поэтому данная функция, как не имеющая критических точек, не имеет экстремума. (Если не учесть, что граничные точки не могут быть точками экстремума, то, определив знак Δ в точке P_1, придем к ошибочному заключению, что она есть точка минимума.)

3) Ищем критические точки $v'_x = 2(x - y)$; $v'_y = -2(x - y) + 3(y - 1)^2$.

Решая систему уравнений $v'_x = 0$, $v'_y = 0$, найдем единственную точку $M_0(1; 1)$, которая является единственной критической точкой функции v.

Далее, чтобы установить, будет ли экстремум в точке M_0, вычисляем значение Δ в этой точке: $v''_{xx} = 2$, $v''_{xy} = -2$, $v''_{yy} = 2 + 6(y - 1)$; $\Delta(M_0) = 0$.

Здесь оказалось, что $\Delta(M_0)$ не имеет знака (случай 3). Чтобы установить, имеет ли экстремум функция v в критической точке M_0, исследуем знак ее приращения $\Delta v = v(M) - v(M_0) = (x - y)^2 + (y - 1)^3$ вблизи точки M_0.

Пусть точка M лежит на биссектрисе $y = x$. Тогда $\Delta v = (y - 1)^3$. Если M будет ниже M_0, т. е. если $y_M < 1$, то $\Delta v < 0$, а если M будет выше M_0, т. е. если $y_M > 1$, то $\Delta v > 0$. Здесь оказалось, что вблизи M_0 разность Δv не сохраняет знака, вследствие чего в точке M_0 нет экстремума.

4) Ищем критические точки $w'_x = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; $w'_y = \frac{2}{3\sqrt[3]{y}}$; $w'_z = \frac{2}{3\sqrt[3]{z}}$.

Эти частные производные не обращаются в нуль ни при каких значениях x, y, z; они не существуют (обращаются в бесконечность) в точке $P_0(0; 0; 0)$. Точка P_0 лежит внутри области определения функции w, которая представляет совокупность всех точек (x, y, z) пространства. Поэтому P_0 критическая точка.

Исследуя знак разности $w(P) - w(P_0) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}}$ вблизи точки P_0, убеждаемся, что при любых отличных от нуля значениях x, y, z она сохраняет положительный знак. Поэтому P_0 есть точка минимума, $w_{\min} = w(P_0) = 0$.

Исследовать на экстремум функции:

775. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$. **776.** $v = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.

777. $p = 2xy - 2x - 4y$. **778.** $z = x^3 + xy^2 + 6xy$.

779. $\varphi = (x^2 + y)\sqrt{e^y}$. **780.** $q = 3\ln\frac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12 - x - y)$.

781.*. $z = 2 + (x-1)^4(y+1)^6$. **782*.** $u = 1 - (x-2)^{\frac{4}{5}} - y^{\frac{4}{5}}$.

§ 10. Наибольшее и наименьшее значения функции

Понятия наибольшего и наименьшего значений функции многих переменных определяются так же, как и для функции одной переменной (гл. III, § 5).

Наибольшее или наименьшее из всех значений функции нельзя смешивать с максимумом или минимумом функции, которые являются наибольшим или наименьшим значением функции только по сравнению с ее значениями в соседних точках.

Если функция разрывна или непрерывна в незамкнутой области, то она может не иметь ни наибольшего, ни наименьшего значения.

Функция $f(M)$, непрерывная в некоторой ограниченной замкнутой области D, обязательно имеет в этой области наибольшее и наименьшее значения. Эти значения достигаются ею или в точках экстремума, лежащих внутри области D, или в точках, лежащих на границе области.

Чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение функции $f(M)$ в ограниченной замкнутой области D, где она непрерывна, можно руководствоваться следующим правилом:

А. Найти критические точки, лежащие внутри области D, и вычислить значения функции в этих точках (не вдаваясь в исследование, будет ли в них экстремум функции и какого вида).

Б. Найти наибольшее (наименьшее) значение функции на границе области D.

В. Сравнить полученные значения функции: самое большее (меньшее) из них и будет наибольшим (наименьшим) значением функции во всей области D.