4) Ищем критические точки $w'_x = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; $w'_y = \frac{2}{3\sqrt[3]{y}}$; $w'_z = \frac{2}{3\sqrt[3]{z}}$.

Эти частные производные не обращаются в нуль ни при каких значениях x, y, z; они не существуют (обращаются в бесконечность) в точке $P_0(0; 0; 0)$. Точка P_0 лежит внутри области определения функции w, которая представляет совокупность всех точек (x, y, z) пространства. Поэтому P_0 критическая точка.

Исследуя знак разности $w(P) - w(P_0) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}}$ вблизи точки P_0, убеждаемся, что при любых отличных от нуля значениях x, y, z она сохраняет положительный знак. Поэтому P_0 есть точка минимума, $w_{\min} = w(P_0) = 0$.

Исследовать на экстремум функции:

775. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$. **776.** $v = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.

777. $p = 2xy - 2x - 4y$. **778.** $z = x^3 + xy^2 + 6xy$.

779. $\varphi = (x^2 + y)\sqrt{e^y}$. **780.** $q = 3\ln\frac{x}{6} + 2\ln y + \ln(12 - x - y)$.

781.*. $z = 2 + (x-1)^4(y+1)^6$. **782*.** $u = 1 - (x-2)^{\frac{4}{5}} - y^{\frac{4}{5}}$.

§ 10. Наибольшее и наименьшее значения функции

Понятия наибольшего и наименьшего значений функции многих переменных определяются так же, как и для функции одной переменной (гл. III, § 5).

Наибольшее или наименьшее из всех значений функции нельзя смешивать с максимумом или минимумом функции, которые являются наибольшим или наименьшим значением функции только по сравнению с ее значениями в соседних точках.

Если функция разрывна или непрерывна в незамкнутой области, то она может не иметь ни наибольшего, ни наименьшего значения.

Функция $f(M)$, непрерывная в некоторой ограниченной замкнутой области D, обязательно имеет в этой области наибольшее и наименьшее значения. Эти значения достигаются ею или в точках экстремума, лежащих внутри области D, или в точках, лежащих на границе области.

Чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение функции $f(M)$ в ограниченной замкнутой области D, где она непрерывна, можно руководствоваться следующим правилом:

А. Найти критические точки, лежащие внутри области D, и вычислить значения функции в этих точках (не вдаваясь в исследование, будет ли в них экстремум функции и какого вида).

Б. Найти наибольшее (наименьшее) значение функции на границе области D.

В. Сравнить полученные значения функции: самое большее (меньшее) из них и будет наибольшим (наименьшим) значением функции во всей области D.

783. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

1) $z=x^2-y^2+2a^2$ в круге $x^2+y^2\leqslant a^2$;

2) $v=2x^3+4x^2+y^2-2xy$ в замкнутой области, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=4$.

Решение. 1) Согласно указанному правилу:

А. Найдем критические точки функции z, лежащие внутри круга, и вычислим ее значения в этих точках: $z'_x=2x$, $z'_y=-2y$; решая систему уравнений $z'_x=0$, $z'_y=0$, найдем критическую точку $K(0;\ 0)$, которая лежит внутри круга. Других критических точек нет. Значение функции в этой точке $z(K)=2a^2$.

Б. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции на границе заданной области — на окружности $x^2+y^2=a^2$. Уравнение окружности связывает между собой переменные x и y. Определяя из этого уравнения одну переменную через другую, например $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$, и подставляя в выражение функции z, преобразуем ее в функцию одной переменной: $z(x)=2x^2+a^2$, где x изменяется на отрезке $[-a,\ a]$.

Далее ищем наибольшее и наименьшее значения функции $z(x)$ на отрезке $[-a,\ a]$, которые и будут искомыми наибольшим и наименьшим значениями функции $z(x,\ y)$ на границе заданной области — на окружности.

Согласно правилу, указанному в гл. III, § 5:

I. Ищем критические точки функции $z(x)$, лежащие внутри отрезка $[-a,\ a]$, и вычисляем ее значения в этих точках: $z'(x)=4x$; $z'(x)=0$ в точке $x=0$. Эта единственная критическая точка лежит внутри данного отрезка. Значение $z(x)$ в этой точке $z(0)=a^2$.

II. Вычисляем значения $z(x)$ на концах данного отрезка: $z(-a)=z(a)=3a^2$.

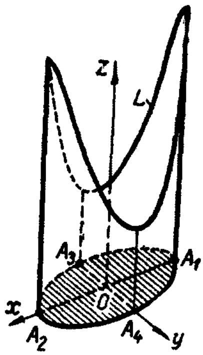
III. Сравнивая вычисленные значения $z(x)$ во внутренней критической точке $x=0$ и на концах отрезка $x=-a$ и $x=a$, заключаем: наибольшее значение функции $z(x)$ на отрезке $[-a, a]$ [или что то же, функции $z(x,\ y)$ на границе данной области — на окружности $x^2+y^2=a^2$] равно $3a^2$, а наименьшее значение $z(x)$ на данном отрезке [или, что то же, $z(x,\ y)$ на данной границе] равно a^2.

В. Сравнивая значение z во внутренней критической точке K с ее наибольшим и наименьшим значениями на окружности, заключаем: наибольшее значение функции z в данной замкнутой области — круге равно $3a^2$ и достигается ею в граничных точках $A_1(-a,\ 0)$ и $A_2(a,\ 0)$, а ее наименьшее значение в этой области равно a^2 и достигается в граничных точках $A_3(0,\ -a)$ и $A_4(0,\ a)$, (черт. 142). Ординаты точек A_1, A_2, A_3, A_4, которые лежат на окружности, вычислены из уравнения окружности по известным их абсциссам.

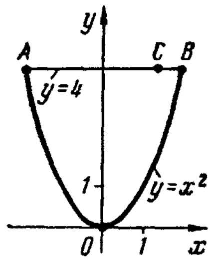
2) Руководствуясь указанным правилом:

А. Ищем критические точки функции v, лежащие внутри заданной области (черт. 143) $v'_x = 6x^2 + 8x - 2y$; $v'_y = 2y - 2x$; решая систему уравнений $v'_x = 0$, $v'_y = 0$, найдем две критические точки $(0;\ 0)$ и $(-1;\ -1)$, из которых ни одна не лежит внутри заданной области. Других критических точек функция v не имеет.

Б. Ищем наибольшее и наименьшее значения v на границе заданной области. Она состоит из двух участков AOB и AB, имеющих различные уравнения. Поэтому вначале найдем наибольшее и наименьшее значения v на каждом из этих участ-



Черт. 142



Черт. 143

ков, затем, сопоставляя их, найдем наибольшее и наименьшее значения v на всей границе.

На участке AOB имеем $y = x^2$, $v_1(x) = x^4 + 4x^2$, где x изменяется на отрезке $[-2;\ 2]$.

Согласно правилу гл. III, § 5, ищем наибольшее и наименьшее значения v_1 на отрезке $[-2;\ 2]$:

I. $v'_1 = 4x^3 + 8x$; $v'_1 = 0$ при $x = 0$; $v_1(0) = 0$.

II. $v_1(-2) = v_1(2) = 32$.

III. Сравнивая значения v_1 во внутренней критической точке $x = 0$ и на концах отрезка $x = -2$, $x = 2$, заключаем: наибольшее значение v_1 на отрезке $[-2;\ 2]$ равно 32 (в точках $x = \pm 2$), а наименьшее значение v_1 на этом отрезке равно нулю (в точке $x = 0$).

На участке AB имеем $y = 4$, $v_2(x) = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$, где $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

Ищем наибольшее и наименьшее значения v_2 на отрезке $[-2;\ 2]$:

I. $v'_2 = 6x^2 + 8x - 8$; внутри данного отрезка $v'_2 = 0$ при $x = \frac{2}{3}$ (в точке C); $v_2\left(\frac{2}{3}\right) = 16\frac{22}{27}$.

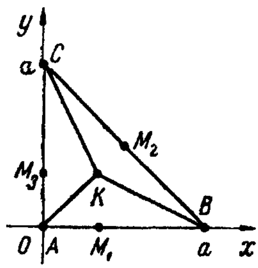
II. $v_2(-2) = v_2(2) = 32$.

III. Наибольшее значение v_2 на отрезке $[-2;\ 2]$ равно 32 (в точках $x=\pm 2$), а наименьшее значение v_2 на этом отрезке равно $16\frac{22}{27}$ $\left(\text{в точке } x=\frac{2}{3}\right)$.

Сопоставляя значения v на участках AOB и AB, приходим к выводу: на всей границе $AOBA$ наибольшее значение функции v равно 32 (в точках A и B), а ее наименьшее значение равно нулю (в точке O).

В. Внутри заданной замкнутой области функция v не имеет точек экстремума, ее наибольшее и наименьшее значения достигаются в точках, лежащих на границе этой области. В граничных точках $A(-2;\ 4)$ и $B(2;\ 4)$ функция v имеет наибольшее значение, $v_{нб}=v(A)=v(B)=32$, а в граничной точке $O(0,\ 0)$ она имеет наименьшее значение, $v_{нм}=$ $=v(O)=0$.

784. Найти такую точку равнобедренного прямоугольного треугольника, для которой сумма квадратов расстояний до его вершин будет наименьшая.



Черт. 144

Решение. Выберем прямоугольную систему координат xOy, как показано на черт. 144, тогда координаты вершин треугольника будут $A(0,\ 0)$, $B(a,\ 0)$, $C(0,\ a)$. Возьмем произвольную точку треугольника $M(x, y)$ и определим сумму квадратов расстояний ее до вершин треугольника $u=MA^2+MB^2+MC^2=3x^2+$ $+3y^2-2ay-2ax+2a^2$. Она зависит от двух переменных x и y, которые согласно условию могут принимать любые значения из замкнутой области треугольника ABC.

Далее, согласно правилу, указанному в начале этого параграфа, найдем наименьшее значение функции $u(x,\ y)$ в треугольнике ABC:

А. $u'_x=6x-2a$; $u'_y=6y-2a$.

Из системы уравнений $u'_x=0$, $u'_y=0$ найдем единственную критическую точку $K\left(\frac{a}{3},\ \frac{a}{3}\right)$, лежащую внутри треугольника ABC. Значение u в этой точке $u(K)=\frac{4}{3}a^2$.

Б. На стороне AB имеем: $y=0$, $u(x,\ 0)=u_1=3x^2-2ax+$ $+2a^2$, где $0\leqslant x\leqslant a$.

I. $u'_1=6x-2a$; $u'_1=0$ при $x=\frac{a}{3}$ (в точке M_1); $u_1\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{5}{3}a^2$.

II. $u_1(0)=2a^2$; $u_1(a)=3a^2$.

III. Наименьшее значение $u_1(x)$ на отрезке $[0,\ a]$ равно $\frac{5}{3}a^2$.

На стороне BC имеем: $x=a-y$ (из уравнения прямой BC); $u(a-y,\ y)=u_2=6y^2-6ay+3a^2$, где $0\leqslant y\leqslant a$.

I. $u'_2=12y-6a$; $u'_2=0$ при $y=\frac{a}{2}$ (в точке M_2); $u_2\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{3}{2}a^2$.

II. $u_2(0)=u_2(a)=3a^2$.

III. Наименьшее значение $u_2(y)$ на отрезке $[0, a]$ равно $\frac{3}{2}a^2$.

На стороне CA имеем: $x=0$; $u(0, y)=u_3=3y^2-2ay+2a^2$, где $0\leqslant y\leqslant a$.

I. $u_3'=6y-2a$; $u_3'=0$ при $y=\frac{a}{3}$ (в точке M_3); $u_3\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{5}{3}a^2$.

II. $u_3(0)=2a^2$; $u_3(a)=3a^2$.

III. Наименьшее значение $u_3(y)$ на отрезке $[0, a]$ равно $\frac{5}{3}a^2$.

Сравнивая значения u на сторонах AB, BC, CA, заключаем: наименьшее значение u на всей границе $ABCA$ равно $\frac{5}{3}a^2$.

В. Сопоставляя значение u во внутренней критической точке K с ее наименьшим значением на границе области, приходим к выводу, что среди всех значений u в различных точках треугольника ABC наименьшим является ее значение в точке $K\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$. Легко убедиться, что точка K является центром тяжести данного треугольника.

Эту задачу можно решить и для любого треугольника; искомая точка также будет его центром тяжести.

Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

785. $\varphi=x^3+y^3-9xy+27$ в квадрате $0\leqslant x\leqslant 4$, $0\leqslant y\leqslant 4$.

786. $r=3xy$ в круге $x^2+y^2\leqslant 2$.

787. Найти наибольшее значеиие функции $v=xy(4-x-y)$ в треугольнике, ограниченном прямыми $x=1$, $y=0$, $x+y=6$.

788*. Найти наименьшее значение функции $u=\sin x+\sin y+\cos(x+y)$ в квадрате $0\leqslant x\leqslant 1{,}5\pi$, $0\leqslant y\leqslant 1{,}5\pi$.

789. Найти точку треугольника $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 1)$, сумма квадратов расстояний которой до его вершин имеет наибольшее значение.

790. Какой треугольник с данным периметром $2p$ имеет наибольшую площадь? (Использовать формулу для площади треугольника по трем его сторонам.)

791. Найти точку четырехугольника $(0, 0)$, $(a, 0)$, (a, a), $(0, 2a)$, сумма квадратов расстояний которой до его вершин имеет наименьшее значение.

792. Из куска проволоки длиной l сделать каркас прямоугольного параллелепипеда с наибольшим объемом.

793. Определить размеры открытого прямоугольного ящика с данным объемом V и с наименьшей поверхностью.