ГЛАВА VII

КРАТНЫЕ, КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Кратные (двойные, тройные), криволинейные и поверхностные интегралы, как и обыкновенные (однократные) определенные интегралы, служат для вычисления различных величин.

В главе V «Определенный интеграл» разъяснен общий метод вычисления различных величин как пределов соответствующих интегральных сумм. Суть его заключается в следующем:

1. Искомая величина разбивается на большое число малых элементов.

2. Вычисляется приближенное значение (главная часть) каждого элемента и путем их суммирования находится приближенное значение всей искомой величины в виде интегральной суммы.

3. Находится предел этой интегральной суммы, который и дает точное значение искомой величины.

В простейших задачах, приведенных в главе V, вычисление величины сводилось к вычислению предела интегральной суммы, распространяющейся на прямолинейный отрезок изменения одной переменной, который называется простым или обыкновенным определенным интегралом.

В более сложных задачах, рассматриваемых в этой главе, вычисление величины сводится к вычислеиию предела интегральной суммы, распространяющейся или на плоскую область изменения двух переменных, или на пространственную область изменения трех переменных, или вдоль дуги некоторой кривой, или по некоторой поверхности, которые и называются соответственно двойным, тройным, криволинейным и поверхностным интегралами.

Все указанные определенные интегралы определяются вполне аналогично и отличаются друг от друга в основном лишь областью интегрирования.

§ 1. Двойной интеграл, его вычисление двукратным интегрированием

Если функция $f(M)$ непрерывна в некоторой замкнутой плоской области D и если разбить эту область произвольным способом на n частичных областей с площадями Δs_1, Δs_2, ..., Δs_n, выбрать в каждой из них по одной произвольной точке M_1, M_2, ..., M_n, вычислить значения функции в этих точках и составить сумму

$$f(M_1)\Delta s_1 + f(M_2)\Delta s_2 + \ldots + f(M_n)\Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i,$$

то она называется интегральной суммой функции $f(M)$ по области D.

Очевидно интегральная сумма зависит как от способа разбиения области D на n частичных областей, так и от выбора в них точек M_i, т. е. для всякой данной функции $f(M)$ и всякой данной замкнутой областн D можно составить бесчисленное множество различных интегральных сумм.

Однако при неограниченном увеличении n и при стремлении к нулю наибольшего из диаметров* частичных областей все эти различные интегральные суммы имеют один общий предел, который называется двойным интегралом от функции $f(M)$ по области D и обозначается $\iint\limits_D f(M)\,ds$.

Двойной интеграл обладает всеми основными свойствами обыкновенного определенного интеграла: *область интегрирования двойного интеграла можно разбивать на части, двойной интеграл от суммы функций равен сумме двойных интегралов от всех слагаемых, постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла.*

Вычисление двойного интеграла $\iint\limits_D f(M)\,ds$ сводится к вычислению одного или нескольких двукратных интегралов вида

$$I_1 = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left[\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} F(\alpha, \beta)\,d\beta\right]d\alpha = \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} F(\alpha, \beta)\,d\beta$$

или

$$I_2 = \int\limits_{\beta_I}^{\beta_{II}}\left[\int\limits_{\alpha_I}^{\alpha_{II}} F(\alpha, \beta)\,d\alpha\right]d\beta = \int\limits_{\beta_I}^{\beta_{II}} d\beta \int\limits_{\alpha_I}^{\alpha_{II}} F(\alpha, \beta)\,d\alpha,$$

каждый из которых есть результат последовательного вычисления двух обыкновенных определенных интегралов.

---

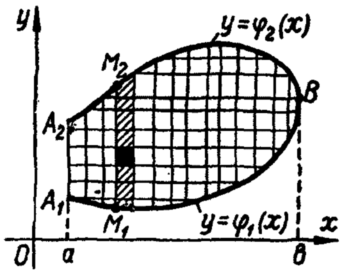
* Диаметром области называется наибольшая из ее хорд.

В двукратном интеграле I_1 вначале функция $F(\alpha, \beta)$ интегрируется по β, причем α рассматривается как постоянная, а затем полученный результат интегрируется по α.

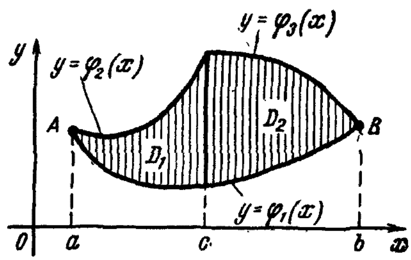
В двукратном интеграле I_2 интегрирование выполняется в обратном порядке: вначале по α, причем β рассматривается как постоянная, а затем полученный результат интегрируется по β.

Как правило пределы при первом интегрировании являются переменными, зависят от той переменной, которая при этом рассматривается как постоянная. Пределы при втором интегрировании всегда постоянны.

Если область интегрирования D отнесена к прямоугольной системе координат xOy и если она разбивается на частичные



Черт. 145



Черт. 146

области сетью прямых, параллельных осям координат (черт. 145), то площадь частичной области $ds = dx\,dy$ (как площадь прямоугольника со сторонами dx и dy) и

$$\iint\limits_D f(M)\,ds = \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy.$$

Если при этом область D такова, что любая прямая, проходящая внутри этой области параллельно оси Oy, пересекает ее границу в двух точках (черт. 145), то она определяется неравенствами вида

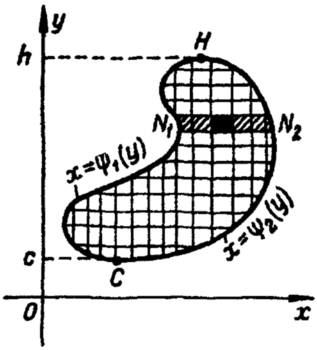
$$\varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x), \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

где $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$—уравнения нижней (A_1M_1B) и верхней (A_2M_2B) линий границы; a и b—абсциссы крайних слева и справа точек области D. В этом случае двойной интеграл выражается через двукратный интеграл по формуле

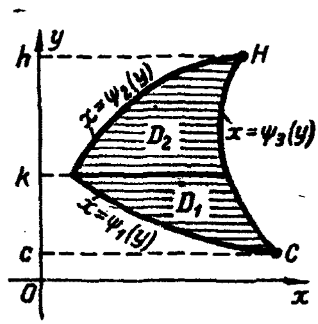
$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy. \qquad (1)$$

По этой формуле интегрирование выполняется вначале по y— в пределах от $y_1 = \varphi_1(x)$ до $y_2 = \varphi_2(x)$, которые указывают границы изменения y при постоянном, но произвольном значении x, а потом по x, — в пределах от $x_1 = a$ до $x_2 = b$, которые являются крайними (наименьшим и наибольшим) значениями x во всей области D.

В этом случае, если окажется, что нижняя или верхняя линия границы состоит из нескольких участков, имеющих различные уравнения, то область D следует разбить прямыми, параллельными оси Oy, на части, в каждой из которых нижняя и верхняя линии границы определялись бы каждая одним уравнением.



Черт. 147



Черт. 148

Так, для области D, изображенной на черт. 146, вычисление двойного интеграла приводится к вычислению двух двукратных интегралов:

$$\iint\limits_D u\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} u\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} u\,dx\,dy = \int\limits_a^c dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} u\,dy + \int\limits_c^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_3(x)} u\,dy.$$

Если граница области D пересекается в двух точках всякой прямой, проходящей внутри этой области параллельно оси Ox (черт. 147), то она определяется неравенствами вида

$$\psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y), \quad c \leqslant y \leqslant h,$$

где $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$ — уравнения левой (CN_1H) и правой (CN_2H) линий границы,

c и h — ординаты крайних снизу и сверху точек области D.

В этом случае двойной интеграл выражается через двукратный интеграл по формуле

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_c^h dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx. \qquad (2)$$

Здесь интегрирование выполняется в другом порядке: вначале по x, затем по y. Пределы внутреннего интеграла указывают границы изменения x при постоянном, но произвольном значении y;

пределы внешнего интеграла указывают границы, в которых может изменяться y во всей области D.

В этом случае, если левая или правая линия границы будет состоять из нескольких участков с различными уравнениями, то область D следует разбить прямыми, параллельными оси Ox, на части, где левая и правая линии границы определялись бы каждая одним уравнением.

Согласно этому положению, двойной интеграл по области D, изображенной на черт. 148, сводится к двум двукратным интегралам:

$$\iint\limits_D u\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} u\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} u\,dx\,dy = \int\limits_c^k dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_3(y)} u\,dx +$$

$$+\int\limits_k^h dy \int\limits_{\psi_2(y)}^{\psi_3(y)} u\,dx.$$

Пределы внешнего интеграла всегда постоянны. Пределы внутреннего интеграла, как правило, являются переменными и зависят от той переменной, которая рассматривается как постоянная; *оба они будут постоянными только в том случае, когда область интегрирования представляет прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат.*

794. Вычислить двукратные интегралы:

$$1)\ I_1 = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2x} (x - y + 1)\,dy; \qquad 2)\ I_2 = \int\limits_2^4 dy \int\limits_0^y \frac{y^3}{x^2+y^2}\,dx.$$

Решение. 1) Сначала вычисляем внутренний интеграл, где y является переменной, а x постоянной:

$$\int\limits_x^{2x} (x-y+1)\,dy = xy - \frac{y^2}{2} + y\,\Big|_{y=x}^{y=2x} = x - \frac{x^2}{2}.$$

Далее вычисляем внешний интеграл, — полученный результат интегрируем по x:

$$I_1 = \int\limits_0^1 \left(x - \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\,\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

2) Здесь интегрируем сначала по x, считая y постоянной, затем по y:

$$\int\limits_0^y \frac{y^3}{x^2+y^2}\,dx = y^3 \int\limits_0^y \frac{dx}{x^2+y^2} = y^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{y}\,\Big|_{x=0}^{x=y} = \frac{\pi y^2}{4};$$

$$I_2 = \int\limits_2^4 \frac{\pi y^2}{4}\,dy = \frac{\pi}{12} y^3\,\Big|_2^4 = \frac{14}{3}\pi.$$

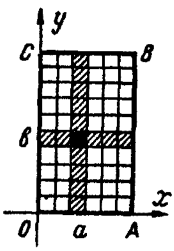
Вычисление можно записывать короче:

$$I_2=\int_2^4 dy\int_0^y \frac{y^3}{x^2+y^2}\,dx=\int_2^4 y^2\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\Big|_{x=0}^{x=y}dy=$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_2^4 y^2\,dy=\frac{\pi}{12}y^3\Big|_2^4=\frac{14}{3}\pi.$$

795. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D xy\,dx\,dy$, если область D:

1) прямоугольник, ограниченный прямыми $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$;



Черт. 149

2) эллипс $4x^2+y^2\leqslant 4$;

3) ограничена прямой $y=x-4$ и параболой $y^2=2x$.

Решение. 1) Построив данные прямые (черт. 149), получим прямоугольник $OABC$ со сторонами, параллельными осям координат. При такой простейшей области интегрирования безразлично, вычислять ли двойной интеграл по формуле (1) или по формуле (2).

Интегрируя вначале по y, затем по x [по формуле (1)], получим

$$\iint\limits_D xy\,dx\,dy=\int_0^a x\,dx\int_0^b y\,dy=\int_0^a\left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^b\right)x\,dx=$$

$$=\frac{b^2}{2}\int_0^a x\,dx=\frac{b^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^a=\frac{a^2b^2}{4}.$$

Интегрируя в другом порядке—вначале по x, затем по y [по формуле (2)], получим тот же результат:

$$\iint\limits_D xy\,dx\,dy=\int_0^b y\,dy\int_0^a x\,dx=\int_0^b\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^a\right)y\,dy=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^b y\,dy=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^b=\frac{a^2b^2}{4}.$$

2) Построив область D (черт. 150), будем сначала интегрировать по x, а затем по y [по формуле (2)].

Разрешая уравнение границы области D (эллипса) относительно x, найдем пределы внутреннего интеграла (с переменной x):

$$x=-\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}\ \text{ и }\ x=\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}.$$

Пределы внешнего интеграла (с переменной y) найдем как ординаты самой нижней и самой верхней точек области D (или как наименьшее и наибольшее значения y во всей области D): $y=-2$ и $y=2$.

Подставляя найденные пределы и интегрируя, получим

$$\iint\limits_D xy\,dx\,dy=\int\limits_{-2}^{2} y\,dy \int\limits_{-\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}} x\,dx=\int\limits_{-2}^{2} y\,dy\cdot 0=0,$$

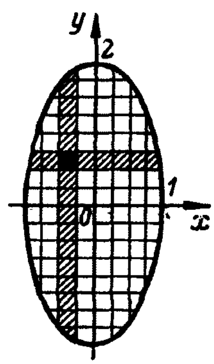
так как пределы внутреннего интеграла отличаются только по знаку, а его подынтегральная функция нечетная (см. гл. V, зад. 592).

Тот же результат получим, интегрируя сначала по y, а затем по x:

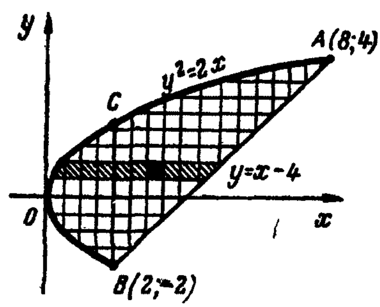
$$\iint\limits_{4x^2+y^2\leqslant 4} xy\,dx\,dy=\int\limits_{-1}^{1} x\,dx \int\limits_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} y\,dy=0.$$

Здесь границы изменения y (пределы внутреннего интеграла) найдены из уравнения эллипса путем решения его относительно y; границы изменения x (пределы внешнего интеграла) найдены как наименьшее и наибольшее значения x во всей области D.

3) Построив данные линии между точками их пересечения $(2;\ -2)$ и $(8;\ 4)$, получим параболический сегмент AOB (черт. 151).



Черт. 150



Черт. 151

Если вначале интегрировать по x, а затем по y, то двойной интеграл по этой области выражается одним двукратным интегралом

$$I=\iint\limits_D xy\,dx\,dy=\int\limits_{-2}^{4} y\,dy \int\limits_{\frac{1}{2}y^2}^{y+4} x\,dx,$$

так как точки A и B (с наибольшей и наименьшей ординатами) разбивают границу области на левую (AOB) и правую (AB) линии, каждая из которых определяется одним уравнением: $x=\frac{y^2}{2}$ и $x=y+4$.

Пределы внутреннего интеграла (по x) можно найти иначе: рассматривая область интегрирования как заключенную в горизонтальной полосе между прямыми $y=-2$, $y=4$ и ограниченную линиями AOB (слева) и BA (справа), получим пределы внутреннего интеграла, разрешая уравнения этих линий относительно x.

Вычисляя двукратный интеграл, получим

$$I=\int_{-2}^{4}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{\frac{y^2}{2}}^{y+4} y\,dy=\frac{1}{2}\int_{-2}^{4} y\left[(y+4)^2-\frac{y^4}{4}\right]dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{4}\left(y^3+8y^2+16y-\frac{y^5}{4}\right)dy=\frac{1}{2}\left(\frac{y^4}{4}+\frac{8y^3}{3}+8y^2-\frac{y^6}{24}\right)\Bigg|_{-2}^{4}=90.$$

Если интегрировать в другом порядке—сначала по y, а затем по x, то согласно замечанию к формуле (1) необходимо разбить область интегрирования прямой BC, параллельной оси Oy, на две части, так как здесь нижняя линия границы состоит из двух участков, которые имеют различные уравнения: $y=-\sqrt{2x}$ (OB) и $y=x-4$ (BA).

Вследствие этого вычисления несколько усложняются:

$$I=\iint\limits_{D_1} xy\,dx\,dy+\iint\limits_{D_2} xy\,dx\,dy=\int_0^2 x\,dx\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} y\,dy+$$

$$+\int_2^8 x\,dx\int_{x-4}^{\sqrt{2x}} y\,dy=\int_0^2 x\,dx\cdot 0+\int_2^8\frac{y^2}{2}\Bigg|_{x-4}^{\sqrt{2x}} x\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_2^8(10x^2-x^3-16x)\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{10}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-8x^2\right)\Bigg|_2^8=90.$$

Иначе пределы внутренних интегралов (по y) можно найти, рассматривая область интегрирования как заключенную в вертикальной полосе между прямыми $x=0$, $x=8$ и ограниченную линиями OB и BA (снизу) и OA (сверху), путем решения уравнений этих линий относительно y.

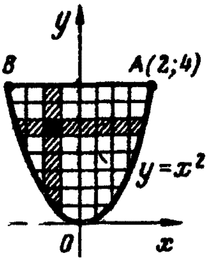
В решении этой задачи оказалось, что при любом порядке интегрирования каждый двойной интеграл имеет одно и то же значение. Это не случайно, ибо вообще *значение двойного интеграла не зависит от порядка интегрирования*. Однако для экономии вычислительной работы следует, если это возможно, выбирать такой порядок интегрирования, при котором нет надобности разбивать область интегрирования на части.

796. Изменить порядок интегрирования в интеграле:

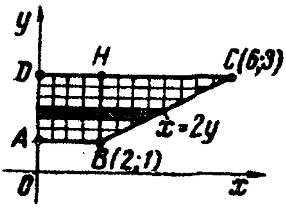
$$1)\ I_1=\int_{-2}^{2}dx\int_{x^2}^{4}f(x,\ y)\,dy;\quad 2)\ I_2=\int_{1}^{3}dy\int_{0}^{2y}u\,dx.$$

$$3)\ I_3=\int_{-\sqrt{3}}^{1}dx\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0}v\,dy.$$

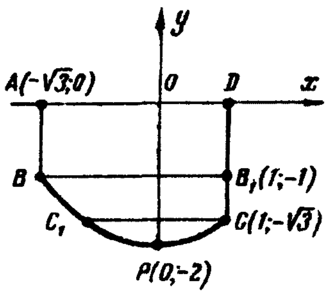
Решение. 1) Вначале по пределам интегрирования определяем область интегрирования. Полагая x равным пределам интеграла с переменной x, а y равным пределам интеграла с переменной y, получим уравнения линий, ограничивающих эту область: $x=-2$, $x=2$, $y=x^2$, $y=4$.



Черт. 152



Черт. 153



Черт. 154

Построив эти линии на черт. 152, получим параболический сегмент OAB, симметричный оси Oy.

Интегрируем в другом порядке — вначале по x, затем по y. Пределы внутреннего интеграла находим, разрешая относительно x уравнение параболы $x=-\sqrt{y}$ и $x=\sqrt{y}$. Пределы внешнего интеграла $y=0$ и $y=4$ находим как наименьшее и наибольшее значения y во всей области OAB. Следовательно,

$$\int_{-2}^{2}dx\int_{x^2}^{4}f(x,\ y)\,dy=\int_{0}^{4}dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,\ y)\,dx.$$

2) Здесь область интегрирования ограничена прямыми $y=1$, $y=3$, $x=0$, $x=2y$. На черт. 153 она представляет трапецию $ABCD$.

При интегрировании в другом порядке, вначале по y, необходимо разбить область $ABCD$ прямой BH, параллельной оси Oy, на две части, так как нижняя линия границы этой области состоит из двух частей AB и BC, которые имеют различные уравнения: $y=1$ и $y=\frac{x}{2}$.

Вследствие этого и интеграл I_2 при изменении порядка интегрирования будет равен сумме двух интегралов:

$$I_2=\int_0^2 dx\int_1^3 u\,dy+\int_2^6 dx\int_{\frac{x}{2}}^3 u\,dy.$$

3) Написав уравнения линий, ограничивающих область интегрирования: $x=-\sqrt{3}$, $x=1$, $y=-\sqrt{4-x^2}$, $y=0$ и построив их на черт. 154, получим криволинейиую трапецию $ABCD$.

Если интегрировать в другом порядке, сначала по x, то область $ABCD$ необходимо разбить прямыми BB_1 и CC_1, параллельными оси Ox, на три области, в каждой из которых левая и правая линии границы определяются каждая одним уравнением.

В области C_1PC, заключенной в горизонтальной полосе между прямыми $y=-2$, $y=-\sqrt{3}$, левая линия границы C_1P имеет уравнение $x=-\sqrt{4-y^2}$, а правая PC—уравнение $x=\sqrt{4-y^2}$.

В области BC_1CB_1, которая заключена в горизонтальной полосе между прямыми $y=-\sqrt{3}$, $y=-1$, левая линня границы определяется уравнением $x=-\sqrt{4-y^2}$, а правая—уравнением $x=1$.

В области ABB_1D, заключенной в горизонтальной полосе между прямыми $y=-1$, $y=0$, уравнение левой линии границы $x=-\sqrt{3}$, а уравнение правой линии границы $x=1$.

Следовательно, при новом порядке интегрирования интеграл I_3 будет равен следующей сумме трех интегралов:

$$I_3=\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} v\,dx+\int_{-\sqrt{3}}^{-1} dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{1} v\,dx+\int_{-1}^{0} dy\int_{-\sqrt{3}}^{1} v\,dx.$$

797. Вычислить двукратные интегралы:

1) $\int_0^2 dx\int_0^3 (x^2+2xy)\,dy$; 2) $\int_2^0 dy\int_0^{y^2} (x+2y)\,dx$;

3) $\int_0^1 dv\int_0^v e^{\frac{u}{v}}\,du$; 4) $\int_0^5 dx\int_0^{5-x} \sqrt{4+x+y}\,dy$.

798. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy$, где область D—треугольник, ограниченный прямыми:

1) $x=0$, $y=0$, $x+y=3$; 2) $x=a$, $y=0$, $y=x$.

799. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$, если область D ограничена:

1) прямыми $x=2$, $y=x$, $x=2y$;

2) параболой $2y=x^2$ и прямой $y=x$.

800. Вычислить двойные интегралы по областям, ограниченным указанными линиями:

1) $\iint\limits_D x^2y\,dx\,dy$; $y=0$, $y=\sqrt{2ax-x^2}$;

2) $\iint\limits_D \sin(x+y)\,dx\,dy$; $y=0$, $y=x$, $x+y=\frac{\pi}{2}$;

3) $\iint\limits_D x^2(y-x)\,dx\,dy$; $x=y^2$, $y=x^2$.

801. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_Q (2x+3y+1)\,dx\,dy$ по области, ограниченной треугольником с вершинами (1; 3), (—1; —1), (2; —4).

Изменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

802. $\int\limits_2^4 dy \int\limits_y^4 f(x, y)\,dx$. **803.** $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} u\,dy$.

804. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x^2} q\,dy$. **805.** $\int\limits_1^2 dy \int\limits_{\frac{1}{y}}^{y} z\,dx$.

806. $\int\limits_{-2}^1 dy \int\limits_{y^2}^4 dx$. **807*.** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^2 dy$.

§ 2. Двойной интеграл в полярных координатах

Если область интегрирования двойного интеграла отнесена к системе полярных координат φ, ρ и если она разбивается на частичные области лучами $\varphi=\varphi_i=\text{const}$, исходящими из полюса, и концентрическими окружностями $\rho=\rho_i=\text{const}$ с центром в полюсе (черт. 155), то $ds=\rho\,d\varphi\,d\rho$ (как площадь прямоугольника со сторонами $\rho\,d\varphi$ и $d\rho$) и

$$\iint\limits_D f(M)\,ds=\iint\limits_D f(\varphi, \rho)\,\rho\,d\varphi\,d\rho=\iint\limits_D F(\varphi, \rho)\,d\varphi\,d\rho.$$