799. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$, если область D ограничена:

1) прямыми $x=2$, $y=x$, $x=2y$;

2) параболой $2y=x^2$ и прямой $y=x$.

800. Вычислить двойные интегралы по областям, ограниченным указанными линиями:

1) $\iint\limits_D x^2y\,dx\,dy$; $y=0$, $y=\sqrt{2ax-x^2}$;

2) $\iint\limits_D \sin(x+y)\,dx\,dy$; $y=0$, $y=x$, $x+y=\frac{\pi}{2}$;

3) $\iint\limits_D x^2(y-x)\,dx\,dy$; $x=y^2$, $y=x^2$.

801. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_Q (2x+3y+1)\,dx\,dy$ по области, ограниченной треугольником с вершинами $(1;\ 3)$, $(-1;\ -1)$, $(2;\ -4)$.

Изменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

802. $\int\limits_2^4 dy \int\limits_y^4 f(x,\ y)\,dx$. **803.** $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} u\,dy$.

804. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2-x^2} q\,dy$. **805.** $\int\limits_1^2 dy \int\limits_{\frac{1}{y}}^{y} z\,dx$.

806. $\int\limits_{-2}^1 dy \int\limits_{y^2}^4 dx$. **807*.** $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^{2} dy$.

§ 2. Двойной интеграл в полярных координатах

Если область интегрирования двойного интеграла отнесена к системе полярных координат φ, ρ и если она разбивается на частичные области лучами $\varphi=\varphi_i=\mathrm{const}$, исходящими из полюса, и концентрическими окружностями $\rho=\rho_i=\mathrm{const}$ с центром в полюсе (черт. 155), то $ds=\rho\,d\varphi\,d\rho$ (как площадь прямоугольника со сторонами $\rho\,d\varphi$ и $d\rho$) и

$$\iint\limits_D f(M)\,ds=\iint\limits_D f(\varphi,\ \rho)\,\rho\,d\varphi\,d\rho=\iint\limits_D F(\varphi,\ \rho)\,d\varphi\,d\rho.$$

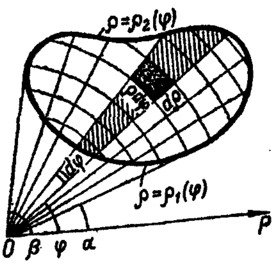
Обычно двойные интегралы в полярных координатах выражаются через двукратные интегралы вида

$$\int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} F(\varphi, \rho)\, d\rho,$$

где первое (внутреннее) интегрирование выполняется по ρ, считая φ постоянной, а второе (внешнее) интегрирование выполняется по φ.

Пределы интегрирования по ρ указывают границы изменения ρ при постоянном, но произвольном значении φ. Пределы интегрирования по φ являются наименьшим и наибольшим значениями φ во всей области D.

Как правило, пределы внутреннего интеграла (по ρ) зависят от φ; они оба будут постоянными только в том случае, когда область интегрирования представляет круговой сектор или разность круговых секторов с центром в полюсе. Пределы внешнего интеграла (по φ) всегда постоянны.



Черт. 155

В приложениях двойных интегралов к геометрическим и физическим задачам обычно искомая величина выражается посредством двойного интеграла, отнесенного к прямоугольным координатам, а затем во многих случаях для упрощения вычислений полученный интеграл преобразуется к полярным координатам с помощью следующего правила:

Для преобразования двойного интеграла, отнесенного к прямоугольным координатам, в двойной интеграл в полярных координатах нужно в подынтегральном выражении прямоугольные координаты заменить полярными: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, *а вместо* $dxdy$ *подставить* $\rho\, d\varphi\, d\rho$.

При этом уравнения линий, ограничивающих область интегрирования, также преобразуются к полярным координатам (посредством указанных формул перехода от прямоугольных координат к полярным).

808. Вычислить двойной интеграл $I=\iint\limits_D \rho\sin\varphi\, d\rho\, d\varphi$, если область D:

1) круговой сектор, ограниченный линиями $\rho=a$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$ и $\varphi=\pi$;

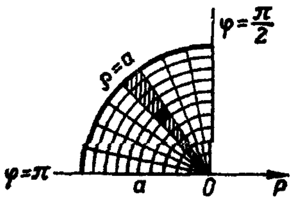
2) полукруг $\rho\leqslant 2a\cos\varphi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$;

3) заключена между линиями $\rho=2+\cos\varphi$ и $\rho=1$.

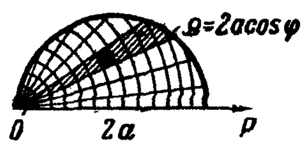
Решение. 1) Построив окружность $\rho=a$ и лучи, образующие с полярной осью углы $\varphi=\frac{\pi}{2}$ и $\varphi=\pi$, получим круговой сектор OAB с центром в полюсе O (черт. 156).

Интегрируя вначале по ρ, затем по φ, получим

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^a\rho\,d\rho=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^a\sin\varphi\,d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi=\frac{a^2}{2}.$$



Черт. 156



Черт. 157

2) Построив область D, черт. 157, интегрируем, как обычно принято в полярных координатах, сиачала по ρ, затем по φ:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}\rho\,d\rho=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{2a\cos\varphi}\sin\varphi\,d\varphi=$$

$$=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi=-2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^2\,d(\cos\varphi)=$$

$$=-\frac{2}{3}a^2\cos^3\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}a^2.$$

3) Построив область D (черт. 158) и интегрируя, получим

$$I=\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_1^{2+\cos\varphi}\rho\,d\rho=\int_0^{2\pi}\frac{\rho^2}{2}\Big|_1^{2+\cos\varphi}\sin\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[(2+\cos\varphi)^2-1]\sin\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_{2\pi}^{0}(3+4\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\cos\varphi=$$

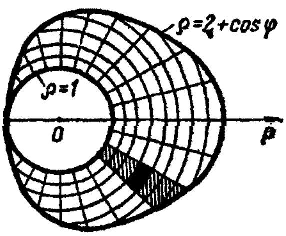
$$=\frac{1}{2}\left(3\cos\varphi+2\cos^2\varphi+\frac{1}{3}\cos^3\varphi\right)\Big|_{2\pi}^{0}=0.$$

809. Преобразовать к полярным координатам и затем вычислить двойной интеграл $I=\iint\limits_D\frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где D — круговое кольцо, заключенное между окружностями $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=4$ (т. е. $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4$), черт. 159.

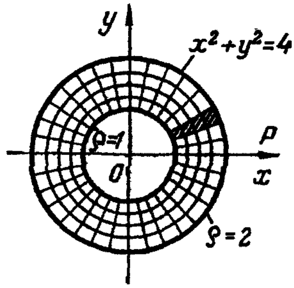
Решение. Пользуясь указанным правилом, получим:

$$I=\iint\limits_{1\leqslant\rho\leqslant 2}\frac{\rho\,d\varphi\,d\rho}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}}=\iint\limits_{1\leqslant\rho\leqslant 2}d\varphi\,d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_1^2 d\rho=2\pi.$$

$\rho=1$ и $\rho=2$—полярные уравнения данных окружностей.



Черт. 158



Черт. 159

810. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_Q \rho^2\,d\varphi\,d\rho$, если область Q ограничена:

1) окружностями $\rho=a$, $\rho=2a$;
2) первым завитком спирали $\rho=a\varphi$ и полярной осью;
3) кривой $\rho=a\sin 2\varphi$.

811. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi$ по области, ограниченной кардиоидой $\rho=a(1+\cos\varphi)$ и полярной осью, если

а) $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ и б) $\pi\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$.

812. Преобразовать к полярным координатам и вычислить двойные интегралы:

1) $\iint\limits_R xy^2\,dx\,dy$, если область R ограничена окружностями $x^2+(y-1)^2=1$ и $x^2+y^2=4y$.

2) $\iint\limits_P e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$, если область P—круг $x^2+y^2\leqslant a^2$.

§ 3. Вычисление площади посредством двойного интеграла

Площадь S плоской области D равна двойному интегралу от ds, распространенному на область D:

$$S=\iint\limits_D ds.$$