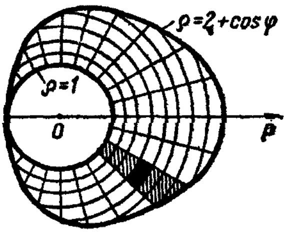
заключенное между окружностями $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=4$ (т. е. $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$), черт. 159.

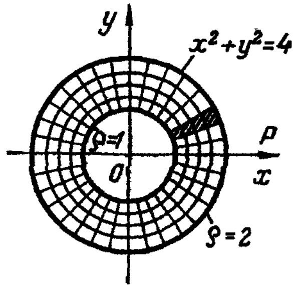
Решение. Пользуясь указанным правилом, получим:

$$I=\iint\limits_{1\leqslant\rho\leqslant 2}\frac{\rho\,d\varphi\,d\rho}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}}=\iint\limits_{1\leqslant\rho\leqslant 2}d\varphi\,d\rho=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_1^2 d\rho=2\pi.$$

$\rho=1$ и $\rho=2$—полярные уравнения данных окружностей.



Черт. 158



Черт. 159

810. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_Q \rho^2\,d\varphi\,d\rho$, если область Q ограничена:

1) окружностями $\rho=a$, $\rho=2a$;
2) первым завитком спирали $\rho=a\varphi$ и полярной осью;
3) кривой $\rho=a\sin 2\varphi$.

811. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi$ по области, ограниченной кардиоидой $\rho=a(1+\cos\varphi)$ и полярной осью, если

а) $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$ и б) $\pi\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$.

812. Преобразовать к полярным координатам и вычислить двойные интегралы:

1) $\iint\limits_R xy^2\,dx\,dy$, если область R ограничена окружностями $x^2+(y-1)^2=1$ и $x^2+y^2=4y$.

2) $\iint\limits_P e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$, если область P—круг $x^2+y^2\leqslant a^2$.

§ 3. Вычисление площади посредством двойного интеграла

Площадь S плоской области D равна двойному интегралу от ds, распространенному на область D:

$$S=\iint\limits_D ds.$$

В прямоугольных координатах $ds = dx\,dy$ и

$$S = \iint\limits_D dx\,dy. \tag{1}$$

В полярных координатах $ds = \rho\,d\varphi\,d\rho$ и

$$S = \iint\limits_D \rho\,d\varphi\,d\rho. \tag{2}$$

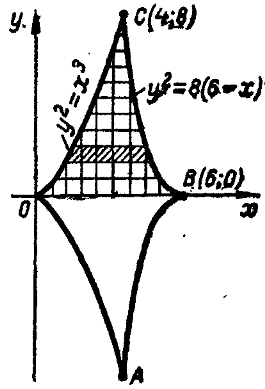
813. Найти площадь области, ограниченной линиями:

1) $y^2 = x^3$, $y^2 = 8(6-x)^3$;

2) $y = 2^x$, $y = 2^{-2x}$, $y = 4$;

3) $\rho = a\cos\varphi$, $\rho = b\cos\varphi$, $b > a > 0$;

4) $(x^2+y^2)^2 = 2a^2xy$.



Черт. 160

Р е ш е н и е. 1) Построив данные полукубические параболы (черт. 160), получим криволинейный четырехугольник $OABC$. Точки A и C пересечения кривых найдены путем совместного решения их уравнений.

Вследствие симметричности фигуры относительно оси Ox ее площадь S равна удвоенной площади криволинейного треугольника OBC, расположенного в первом квадранте.

Согласно формуле (1) площадь области OBC равна двойному интегралу от $dx\,dy$, распространенному на эту область:

$$S = 2\iint\limits_{OBC} dx\,dy = 2\int_0^8 dy \int_{y^{\frac{2}{3}}}^{6-\frac{1}{2}y^{\frac{2}{3}}} dx = 2\int_0^8 x\Big|_{y^{\frac{2}{3}}}^{6-\frac{1}{2}y^{\frac{2}{3}}} dy =$$

$$= 2\int_0^8 \left(6 - \frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}}\right) dy = 2\left(6y - \frac{9}{10}y^{\frac{5}{3}}\right)\Big|_0^8 = 2\left(48 - \frac{9}{10}\cdot 32\right) = 38\frac{2}{5}.$$

Если интегрировать в другом порядке, то необходимо разбить область OBC прямой, проходящей через точку C, параллельно оси Oy на две части. При этом

$$S = 2\left(\int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{x^3}} dy + \int_4^6 dx \int_0^{\sqrt{8(6-x)^3}} dy\right).$$

Разумеется, результат будет тот же самый.

2) Данные линии ограничивают криволинейный треугольник ABC (черт. 161).

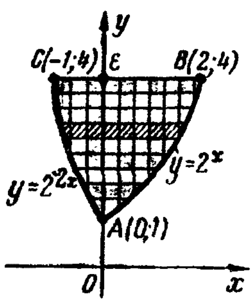
Согласно формуле (1) искомая площадь

$$S=\iint\limits_{ABC} dx\,dy=\int\limits_1^4 dy\int\limits_{-\frac{\ln y}{2\ln 2}}^{\frac{\ln y}{\ln 2}} dx=\int\limits_1^4\left(\frac{\ln y}{\ln 2}+\frac{\ln y}{2\ln 2}\right)dy=\frac{3}{2\ln 2}\int\limits_1^4 \ln y\,dy.$$

Применяя к последнему интегралу формулу интегрирования по частям, получим

$$S=\frac{3}{2\ln 2}(y\ln y-y)\Big|_1^4=\frac{3}{2\ln 2}(4\ln 4-3)=12-\frac{9}{\ln 4}\approx 5{,}507.$$

И здесь при другом порядке интегрирования необходимо разбить область ABC на две области AEC и ABE, вследствие чего площадь S будет равна сумме двух двойных интегралов:



Черт. 161

$$S=\iint\limits_{ABC} dx\,dy=\iint\limits_{AEC} dx\,dy+\iint\limits_{ABE} dx\,dy=$$

$$=\int\limits_{-1}^{0} dx\int\limits_{2^{-2x}}^{4} dy+\int\limits_{0}^{2} dx\int\limits_{2^{x}}^{4} dy.$$

3) Построив данные окружности в полярной системе координат (черт. 162), находим площадь S ограниченной ими области D по формуле (2):

$$S=\iint\limits_{D}\rho\,d\varphi\,d\rho=2\iint\limits_{ABO}\rho\,d\varphi\,d\rho=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{a\cos\varphi}^{b\cos\varphi}\rho\,d\rho=$$

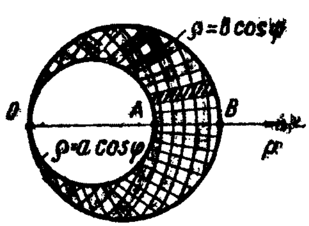
$$=(b^2-a^2)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{b^2-a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=\frac{b^2-a^2}{2}\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}(b^2-a^2).$$

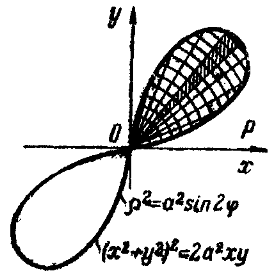
Здесь учтено, что обе окружности симметричны относительно полярной оси и что верхняя половина каждой из них получается при изменении угла φ от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

4) Площадь фигуры, ограниченной данной замкнутой кривой (лемнискатой), проще вычислить, перейдя к полярным координатам.

Полагая в данном уравнении кривой $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, получим после упрощений полярное уравнение этой кривой $\rho^2=a^2\sin 2\varphi$.



Черт. 162



Черт. 163

Построив кривую (черт. 163) и замечая, что она симметрична относительно полюса и что при изменении φ от 0 до $\frac{\pi}{2}$ текущая точка (φ, ρ) опишет половину кривой, расположенную выше полярной оси, по формуле (2) найдем

$$S=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}}\rho\,d\rho=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi\,d\varphi=-\frac{a^2}{2}\cos 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=a^2.$$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

814. $3x^2=25y$, $5y^2=9x$. **815.** $xy=4$, $x+y=5$.
816. $y=e^x$, $y=e^{2x}$, $x=1$. **817.** $\rho=a\cos 2\varphi$.
818. $x+y=1$, $x+3y=1$, $x=y$, $x=2y$.
819. $\rho=4\sin\varphi$, $\rho=2\sin\varphi$. **820.** $\rho=a\sin 3\varphi$.
821. $(x^2+y^2)^2=2y^3$.
822. $(x^2+y^2)^3=a^2(x^4+y^4)$.
} Перейти к полярным координатам.

§ 4. Вычисление объема тела

Объем вертикального цилиндрического тела, имеющего своим основанием область D на плоскости xOy и ограниченного сверху поверхностью $z=f(x, y)$ (черт 164), выражается двойным интегралом

$$V=\iint_D z\,dx\,dy. \qquad \text{(a)}$$