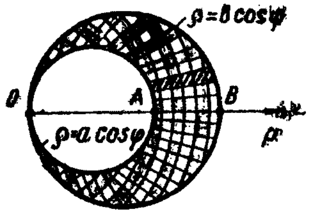
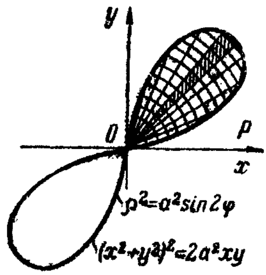
4) Площадь фигуры, ограниченной данной замкнутой кривой (лемнискатой), проще вычислить, перейдя к полярным координатам.

Полагая в данном уравнении кривой $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, получим после упрощений полярное уравнение этой кривой $\rho^2=a^2\sin 2\varphi$.



Черт. 162



Черт. 163

Построив кривую (черт. 163) и замечая, что она симметрична относительно полюса и что при изменении φ от 0 до $\frac{\pi}{2}$ текущая точка (φ, ρ) опишет половину кривой, расположенную выше полярной оси, по формуле (2) найдем

$$S=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}}\rho\, d\rho=a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi\, d\varphi=-\frac{a^2}{2}\cos 2\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=a^2.$$

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

814. $3x^2=25y$, $5y^2=9x$. **815.** $xy=4$, $x+y=5$.

816. $y=e^x$, $y=e^{2x}$, $x=1$. **817.** $\rho=a\cos 2\varphi$.

818. $x+y=1$, $x+3y=1$, $x=y$, $x=2y$.

819. $\rho=4\sin\varphi$, $\rho=2\sin\varphi$. **820.** $\rho=a\sin 3\varphi$.

821. $(x^2+y^2)^2=2y^3$.

822. $(x^2+y^2)^3=a^2(x^4+y^4)$.

} Перейти к полярным координатам.

§ 4. Вычисление объема тела

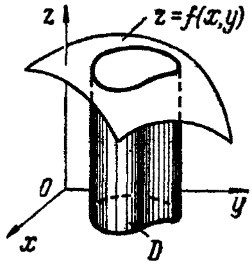
Объем вертикального цилиндрического тела, имеющего своим основанием область D на плоскости xOy и ограниченного сверху поверхностью $z=f(x, y)$ (черт 164), выражается двойным интегралом

$$V=\iint\limits_D z\, dx\, dy. \qquad \text{(a)}$$

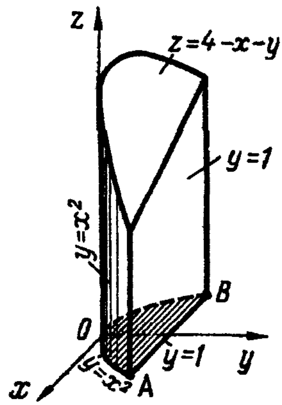
Вычисление объемов тел более сложной формы сводится к вычислению алгебраической суммы объемов нескольких вертикальных цилиндрических тел (с образующими, параллельными оси Oz).

823. Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

1) $y=x^2$, $y=1$, $x+y+z=4$, $z=0$.
2) $z=y^2-x^2$, $z=0$, $y=\pm 2$.
3) $z=4-x^2-y^2$, $2z=2+x^2+y^2$.
4) $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z=a$, $z=b$; $R>b>a>0$.



Черт. 164



Черт. 165

Решение. 1) Данное тело (черт. 165) представляет вертикальный цилиндр, который сверху ограничен частью плоскости $z=4-x-y$, а снизу—частью плоскости xOy, заключенной между параболой $y=x^2$ и прямой $y=1$.

Согласно формуле (а) объем этого тела

$$V=\iint\limits_{OAB} z\,dx\,dy=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}(4-x-y)\,dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left[(4-y)\,x-\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_{x=-\sqrt{y}}^{x=\sqrt{y}}dy=2\int\limits_0^1(4-y)\sqrt{y}\,dy=\frac{68}{15}.$$

При интегрировании в другом порядке

$$V=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}(4-x-y)\,dy=\ldots=\frac{68}{15}.$$

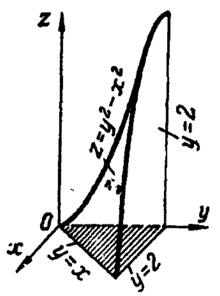
2) Гиперболический параболоид $z=y^2-x^2$ пересекает плоскость xOy $(z=0)$ по двум прямым $y=\pm x$. Вместе с плоскостями $z=0$, $y=\pm 2$ он ограничивает тело, симметричное отно-

сительно плоскостей xOz и yOz. Согласно формуле (а) объем четвертой части тела, расположенной в первом октанте (черт. 166),

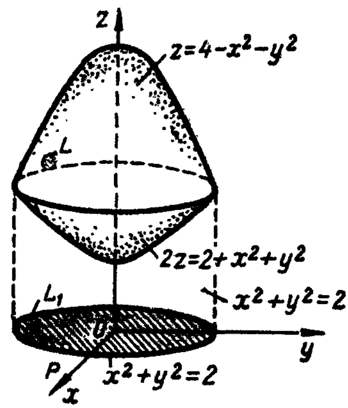
$$\frac{1}{4}V=\iint\limits_{OAB} z\,dx\,dy=\int_0^2 dy\int_0^y (y^2-x^2)\,dx=\int_0^2\left(y^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x=0}^{x=y}dy=$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^2 y^3\,dy=\frac{2}{3}\cdot\frac{y^4}{4}\Big|_0^2=\frac{8}{3};\quad V=\frac{32}{3}.$$

3) Тело, ограниченное данными параболоидами вращения, изображено на черт. 167. Его объем можно найти как разность объемов двух вертикальных цилиндрических тел, которые имеют



Черт 166



Черт. 167

общее нижнее основание D на плоскости xOy, а сверху ограничены данными поверхностями.

$$V=V_1-V_2=\iint\limits_D(4-x^2-y^2)\,dx\,dy-\iint\limits_D\frac{1}{2}(2+x^2+y^2)\,dx\,dy=$$

$$=\frac{3}{2}\iint\limits_D(2-x^2-y^2)\,dx\,dy.$$

Линия L пересечения данных поверхностей определяется системой из их уравнений: $z=4-x^2-y^2$, $2z=2+x^2+y^2$.

Исключая из этой системы z, получим $x^2+y^2=2$—уравнение вертикальной цилиндрической поверхности, которая проходит через линию L и проектирует ее на плоскость xOy. Полученное уравнение будет и уравнением проекции линии L на плоскость xOy—окружности L_1, ограничивающей область D.

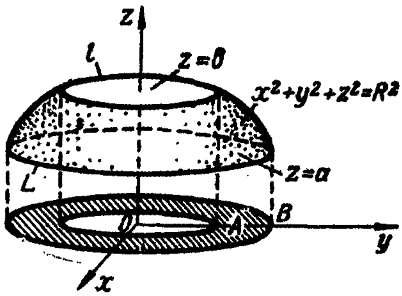
Чтобы упростить вычисление интеграла, преобразуем его к полярным координатам. Полагая $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ и заменяя $dx\,dy$ через $\rho\,d\varphi\,d\rho$, получим

$$V=\frac{3}{2}\iint\limits_{\rho\leqslant\sqrt{2}}(2-\rho^2)\,\rho d\varphi\,d\rho=\frac{3}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{2}}(2\rho-\rho^3)\,d\rho=$$

$$=\frac{3}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}}d\varphi=\frac{3}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{3}{2}\,\varphi\Big|_0^{2\pi}=3\pi$$

($\rho=\sqrt{2}$ есть полярное уравнение окружности $x^2+y^2=2$).

4) Сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$ и плоскости $z=a$ и $z=b$ ограничивают шаровой слой (черт. 168). Его объем $V=V_1+V_2-V_3$, где V_1, V_2 и V_3 — объемы вертикальных цилиндрических тел:



Черт. 168

$$V_1=\pi OA^2b;\quad V_3=\pi OB^2a;$$

$$V_2=\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy,$$

где D — круговое кольцо

$$OA^2\leqslant x^2+y^2\leqslant OB^2.$$

Радиусы $r_1=OA$ и $r_2=OB$ определяются из уравнений вертикальных цилиндров, проектирующих окружности l и L на плоскость xOy.

Исключая z из уравнений сферы и плоскости $z=b$, получим уравнение $x^2+y^2=R^2-b^2$, откуда $OA=\sqrt{R^2-b^2}$. Аналогичным путем из уравнений сферы и плоскости $z=a$ получим уравнение $x^2+y^2=R^2-a^2$, откуда $OB=\sqrt{R^2-a^2}$.

Следовательно, $V_1=\pi b(R^2-b^2)$, $V_3=\pi a(R^2-a^2)$.

Для вычисления двойного интеграла, определяющего V_2, перейдем к полярным координатам:

$$V_2=\iint\limits_{r_1\leqslant\rho\leqslant r_2}\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,d\varphi\,d\rho=4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_{r_1}^{r_2}\sqrt{R^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho=$$

$$=-\frac{4}{3}(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{r_1}^{r_2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{2\pi}{3}(b^3-a^3).$$

Искомый объем шарового слоя $V=\pi b\,(R^2-b^2)+\frac{3}{2}\pi\,(b^3-a^3)-$
$-\pi a\,(R^2-a^2)=\frac{\pi}{3}\,[3R^2(b-a)+a^3-b^3]=\frac{\pi\,(b-a)}{3}\,(3R^2-a^2-ab-b^2).$

При $a=0$, $b=R$ получаем объем полушара $V=\frac{2}{3}\pi R^3$.

Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

824. Цилиндром $x^2+y^2=a^2$ и плоскостями $x+y+z=2a$, $z=0$.

825. Плоскостями $x+y+z=2$, $3x+y=2$, $3x+2y=4$, $y=0$, $z=0$.

826. Эллиптическим параболоидом $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ и плоскостями $x=\pm 1$, $y=\pm 1$.

827. Плоскостями $y+z=0$, $z=0$ и цилиндром $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

828. Сферой $x^2+y^2+z^2=2a^2$ и цилиндром $x^2+y^2=a^2$ *.

829. Плоскостями $y+z=2$, $y-z=2$ и цилиндром $x^2+y^2=4$ *.

830. Конусом $x^2+y^2=z^2$, цилиндром $x^2+y^2=2y$ и плоскостью $z=0$*.

§ 5. Масса, центр тяжести и моменты инерции

Если $\delta(M)$ есть поверхностная плотность ** в точке $M(x, y)$ плоской фигуры (материальной пластинки), занимающей область D, то ее масса m, координаты центра тяжести C и моменты инерции I_x, I_y, I_0 относительно осей Ox и Oy и начала координат O выражаются формулами:

$$1)\quad m=\iint\limits_D \delta(M)\,dx\,dy; \qquad (1)$$

$$2)\quad x_c=\frac{m_y}{m}=\frac{\iint\limits_D x\delta\,dx\,dy}{m};\quad y_c=\frac{m_x}{m}=\frac{\iint\limits_D y\delta\,dx\,dy}{m}, \qquad (2)$$

где m_x и m_y — статические моменты пластинки относительно осей Ox и Oy.

Если пластинка однородна, то $\delta=\text{const}$ выносится за знаки интегралов и сокращается;

$$3)\quad I_x=\iint\limits_D y^2\delta\,dx\,dy;\quad I_y=\iint\limits_D x^2\delta\,dx\,dy; \qquad (3)$$

$$I_0=I_x+I_y=\iint\limits_D (x^2+y^2)\,\delta\,dx\,dy. \qquad (4)$$

---

* В этой задаче для вычисления двойного интеграла полезно перейти к полярным координатам.

** Поверхностной плотностью распределения массы в точке M пластинки называется предел отношения массы площадки, содержащей точку M к ее площади, когда эта площадка стягивается к точке M.