При $a=0$, $b=R$ получаем объем полушара $V=\frac{2}{3}\pi R^3$.

Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

824. Цилиндром $x^2+y^2=a^2$ и плоскостями $x+y+z=2a$, $z=0$.

825. Плоскостями $x+y+z=2$, $3x+y=2$, $3x+2y=4$, $y=0$, $z=0$.

826. Эллиптическим параболоидом $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ и плоскостями $x=\pm 1$, $y=\pm 1$.

827. Плоскостями $y+z=0$, $z=0$ и цилиндром $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

828. Сферой $x^2+y^2+z^2=2a^2$ и цилиндром $x^2+y^2=a^2$ *.

829. Плоскостями $y+z=2$, $y-z=2$ и цилиндром $x^2+y^2=4$ *.

830. Конусом $x^2+y^2=z^2$, цилиндром $x^2+y^2=2y$ и плоскостью $z=0$*.

§ 5. Масса, центр тяжести и моменты инерции

Если $\delta(M)$ есть поверхностная плотность ** в точке $M(x, y)$ плоской фигуры (материальной пластинки), занимающей область D, то ее масса m, координаты центра тяжести C и моменты инерции I_x, I_y, I_0 относительно осей Ox и Oy и начала координат O выражаются формулами:

$$1)\quad m=\iint\limits_D \delta(M)\,dx\,dy; \tag{1}$$

$$2)\quad x_c=\frac{m_y}{m}=\frac{\iint\limits_D x\delta\,dx\,dy}{m};\quad y_c=\frac{m_x}{m}=\frac{\iint\limits_D y\delta\,dx\,dy}{m}, \tag{2}$$

где m_x и m_y — статические моменты пластинки относительно осей Ox и Oy.

Если пластинка однородна, то $\delta=\text{const}$ выносится за знаки интегралов и сокращается;

$$3)\quad I_x=\iint\limits_D y^2\delta\,dx\,dy;\quad I_y=\iint\limits_D x^2\delta\,dx\,dy; \tag{3}$$

$$I_0=I_x+I_y=\iint\limits_D (x^2+y^2)\,\delta\,dx\,dy. \tag{4}$$

---

* В этой задаче для вычисления двойного интеграла полезно перейти к полярным координатам.

** Поверхностной плотностью распределения массы в точке M пластинки называется предел отношения массы площадки, содержащей точку M к ее площади, когда эта площадка стягивается к точке M.

Для однородного вертикального цилиндрического тела (с образующей, параллельной оси Oz), имеющего своим основанием область D на плоскости xOy и ограниченного поверхностью $z=f(x, y)$ (черт. 164),

$$x_c=\frac{\iint\limits_D xz\,dx\,dy}{\iint\limits_D z\,dx\,dy};\quad y_c=\frac{\iint\limits_D yz\,dx\,dy}{\iint\limits_D z\,dx\,dy};\quad z_c=\frac{\iint\limits_D z^2\,dx\,dy}{2\iint\limits_D z\,dx\,dy}. \tag{5}$$

831. Найти массу кругового кольца, если в каждой его точке поверхностная плотность обратно пропорциональна квадрату расстояния ее до центра кольца.

Решение. Обозначим радиусы окружностей, ограничивающих кольцо, через r_1 и r_2 $(r_1<r_2)$, и поместим полюс полярной системы координат в центре кольца; тогда уравнения окружностей будут $\rho=r_1$ и $\rho=r_2$, а поверхностная плотность в точке $M(\varphi, \rho)$ кольца $\delta(M)=\frac{k}{\rho^2}$.

Массу всего кольца найдем по формуле (1), преобразуя ее к полярным координатам:

$$m=\iint\limits_D \delta\rho\,d\varphi\,d\rho=\iint\limits_{r_1\leqslant\rho\leqslant r_2}\frac{k}{\rho}\,d\varphi\,d\rho=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{d\rho}{\rho}=k\int\limits_0^{2\pi}\ln\rho\,\Big|_{r_1}^{r_2}d\varphi=$$

$$=k\ln\frac{r_2}{r_1}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=2k\pi\ln\frac{r_2}{r_1}.$$

832. Найти массу пластинки, имеющей форму эллипса, если поверхностная плотность в каждой точке пластинки пропорциональна ее расстоянию r от малой оси эллипса и при $r=1$ она равна λ.

Решение. Обозначим полуоси эллипса через a и b $(a>b)$ и выберем оси Ox и Oy прямоугольной системы координат так, чтобы они совпали с осями эллипса, тогда уравнение эллипса будет $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Согласно условию задачи в точке $M(x, y)$ пластинки плотность $\delta(M)=\lambda|x|$.

По формуле (1) масса правой половины пластинки

$$\frac{1}{2}m=\iint\limits_D \lambda x\,dx\,dy=\lambda\int\limits_{-b}^{b}dy\int\limits_0^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}x\,dx=\frac{\lambda a^2}{2b^2}\int\limits_{-b}^{b}(b^2-y^2)\,dy=$$

$$=\frac{\lambda a^2}{2b^2}\left(b^2y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-b}^{b}=\frac{2}{3}a^2b\lambda.$$

Следовательно, масса всей пластинки $m=\frac{4}{3}a^2b\lambda$.

833. Найти центр тяжести равнобедренного прямоугольного треугольника, если в каждой его точке поверхностная плотность пропорциональна расстоянию ее до гипотенузы.

Решение. Пусть в прямоугольном равнобедренном треугольнике ABC гипотенуза $AB=2a$. Тогда относительно системы координат, изображенной на черт. 169, уравнения катетов AC и BC будут $y=x+a$ и $y=a-x$.

Согласно условию задачи в точке (x, y) треугольника плотность $\delta=ky$.

Далее, пользуясь формулами (2), вычислим величины m_x, m_y и m для данного треугольника:

$$m_x=\iint\limits_{ABC} ky^2\,dx\,dy=k\int\limits_0^a y^2\,dy\int\limits_{y-a}^{a-y} dx=2k\int\limits_0^a y^2(a-y)\,dy=$$

$$=2k\left(a\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^a=\frac{ka^4}{6}.$$

$$m_y=\iint\limits_{ABC} kxy\,dx\,dy=k\int\limits_0^a y\,dy\int\limits_{-(a-y)}^{a-y} x\,dx=k\int\limits_0^a y\,dy\cdot 0=0.$$

$$m=\iint\limits_{ABC} ky\,dx\,dy=k\int\limits_0^a y\,dy\int\limits_{y-a}^{a-y} dx=2k\int\limits_0^a y(a-y)\,dy=\frac{ka^3}{3}.$$

Следовательно, $x_c=\frac{m_y}{m}=0$, $y_c=\frac{m_x}{m}=\frac{a}{2}$.

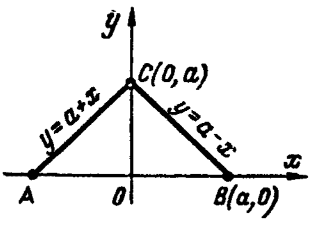
Если бы по всей области треугольника масса была распределена равномерно, то его центр тяжести помещался бы в точке пересечения медиан $\left(0, \frac{a}{3}\right)$.

834. Найти момент инерции треугольника, данного в условии предыдущей задачи, относительно его гипотенузы.

Решение. Относительно указанной на черт. 169 системы координат искомый момент инерции есть I_x. Поэтому, пользуясь формулой (3), найдем

$$I_x=\iint\limits_{ABC} ky^3\,dx\,dy=k\int\limits_0^a y^3\,dy\int\limits_{y-a}^{a-y} dx=$$

$$=2k\int\limits_0^a y^3(a-y)\,dy=\frac{ka^5}{10}.$$



Черт. 169

835. Однородная пластинка ограничена двумя концентрическими эллипсами с совпадающими линиями осей (эллиптическое кольцо). Найти моменты инерции этой пластинки относительно ее осей.

Решение. Пусть внешний эллипс имеет полуоси a_1 и b_1, а внутренний — полуоси a_2 и b_2 и пусть оси прямоугольной системы координат направлены по осям симметрии пластинки. Тогда уравнения эллипсов будут

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{b_2^2}=1,$$

а искомые моменты инерции будут I_x и I_y. Применяя формулы (3) и используя симметричность пластинки (D) относительно осей координат, получим

$$I_x=\iint\limits_D y^2\delta\,dx\,dy=4\delta\left(\iint\limits_{D_1} y^2\,dx\,dy-\iint\limits_{D_2} y^2\,dx\,dy\right),$$

где D_1 и D_2 — расположенные в первом квадранте части областей, ограниченных соответственно внешним и внутренним эллипсами.

Интегрируем вначале по y, затем по x:

$$I_x=4\delta\left(\int\limits_0^{a_1}dx\int\limits_0^{y_1}y^2\,dy-\int\limits_0^{a_2}dx\int\limits_0^{y_2}y^2\,dy\right)=\frac{4}{3}\,\delta\left(\int\limits_0^{a_1}y_1^3\,dx-\int\limits_0^{a_2}y_2^3\,dx\right)=$$

$$=\frac{4}{3}\,\delta\left[\frac{b_1^3}{a_1^3}\int\limits_0^{a_1}(a_1^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx-\frac{b_2^3}{a_2^3}\int\limits_0^{a_2}(a_2^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx\right].$$

Для вычисления интегралов заменяем переменную. В первом интеграле — по формуле $x=a_1\sin t$, во втором — по формуле $x=a_2\sin t$;

$$I_x=\frac{4}{3}\,\delta\left(a_1b_1^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt-a_2b_2^3\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt\right)=$$

$$=\frac{4}{3}\,\delta(a_1b_1^3-a_2b_2^3)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt.$$

Согласно решению задачи 505 последний интеграл равен $\frac{3\pi}{16}$. Следовательно,

$$I_x=\frac{1}{4}\,\pi\delta\,(a_1b_1^3-a_2b_2^3).$$

Аналогично применяя вторую из формул (3), найдем

$$I_y=\frac{1}{4}\,\pi\delta\,(b_1a_1^3-b_2a_2^3).$$

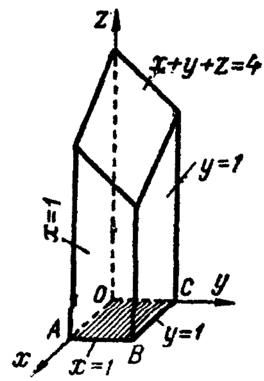
Отсюда при $a_2 = b_2 = 0$ получаем моменты инерции полного эллипса:

$$I_x = \frac{1}{4}\pi\delta a_1 b_1^3; \quad I_y = \frac{1}{4}\pi\delta b_1 a_1^3.$$

При $b_1 = a_1$ и $b_2 = a_2$ получаем момент инерции кругового кольца: $I = \frac{1}{4}\pi\delta\left(a_1^4 - a_2^4\right)$, взятый относительно любого его диаметра.

Для круга радиуса a момент инерции относительно любого диаметра $I = \frac{1}{4}\pi\delta a^4$.

836. Найти центр тяжести однородной усеченной призмы, ограниченной координатными плоскостями и плоскостями $x + y + z = 4$, $x = 1$, $y = 1$.



Черт. 170

Решение. Построив данные плоскости (черт. 170), замечаем, что ограниченная ими усеченная призма симметрична относительно плоскости $x = y$. Вследствие этого $x_c = y_c$.

Далее вычисляем интегралы, содержащиеся в формулах (5),

$$I_1 = \iint\limits_D xz\,dx\,dy = \iint\limits_{OABC} x(4 - x - y)\,dx\,dy =$$

$$= -\int_0^1 x\,dx \int_0^1 (4 - x - y)\,d(4 - x - y) = -\int_0^1 \frac{(4 - x - y)^2}{2}\bigg|_{y=0}^{y=1} x\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^0 (2x^2 - 7x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2\right)\bigg|_1^0 = \frac{17}{12};$$

$$I_2 = \iint\limits_D z^2\,dx\,dy = \iint\limits_{OABC} (4 - x - y)^2\,dx\,dy =$$

$$= -\int_0^1 dx \int_0^1 (4 - x - y)^2\,d(4 - x - y) = -\int_0^1 \frac{(4 - x - y)^3}{3}\bigg|_{y=0}^{y=1} dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^0 [(3 - x)^3 - (4 - x)^3]\,dx = \frac{1}{3}\left[\frac{(x-3)^4}{4} - \frac{(x-4)^4}{4}\right]\bigg|_0^1 = \frac{55}{6};$$

$$I_3 = \iint\limits_D z\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^1 (4 - x - y)\,dy = -\frac{1}{2}\int_0^1 (4 - x - y)^2\bigg|_{y=0}^{y=1} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 [(3 - x)^2 - (4 - x)^2]\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{(x-3)^3}{3} - \frac{(x-4)^3}{3}\right]\bigg|_1^0 = 3.$$

Подставляя в формулы (5) найденные значения интегралов, получим:

$$x_c = y_c = \frac{I_1}{I_3} = \frac{17}{36}; \quad z_c = \frac{I_2}{2I_3} = \frac{55}{36}.$$

837. Найти массу круглой пластинки, если поверхностная плотность в каждой точке пластинки пропорциональна квадрату ее расстояния от центра пластинки.

838. Найти массу квадратной пластинки, в каждой точке которой поверхностная плотность пропорциональна сумме ее расстояний до диагоналей пластинки.

839. Пластинка ограничена параболой $y^2 = 2px$ и ее хордой, проходящей через фокус перпендикулярно к оси параболы. Найти массу пластинки, если в каждой ее точке поверхностная плотность обратно пропорциональна расстоянию точки до директрисы параболы.

840. Найти массу прямоугольника со сторонами a и b, в каждой точке которого поверхностная плотность пропорциональна квадрату расстояния ее от одной данной его вершины.

В задачах 841—843 найти моменты инерции однородных плоских фигур:

841. Прямоугольника со сторонами a и b: 1) относительно стороны a; 2) относительно одной из его вершин; 3) относительно точки пересечения диагоналей.

842. Прямоугольного треугольника с катетами a и b: 1) относительно вершины прямого угла; 2) относительно катета a.

843. Круга радиуса R: 1) относительно касательной; 2) относительно точки на окружности.

844. Найти центр тяжести прямоугольного треугольника, катеты которого равны a и b, если в каждой его точке поверхностная плотность пропорциональна квадрату расстояния ее от вершины прямого угла.

845. Найти центр тяжести расположенной в первом квадранте части эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (пластинки), если в точке (x, y) поверхностная плотность $\delta = kxy$, где k — постоянная.

Найти центры тяжести следующих однородных тел:

846. Полушара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, $z \geqslant 0$.

847. Тетраэдра, ограниченного плоскостями $x + 2y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

848. Шарового слоя, заключенного между сферой $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и плоскостями $x = a$, $x = b$.

§ 6. Тройной интеграл, его вычисление трехкратным интегрированием

Если функция $f(M)$ непрерывна в каждой точке M некоторой замкнутой пространственной области G и если разбить эту область произвольным способом на n частичных областей с объемами Δv_1,