получим:

$$x_c = y_c = \frac{I_1}{I_3} = \frac{17}{36}; \quad z_c = \frac{I_2}{2I_3} = \frac{55}{36}.$$

837. Найти массу круглой пластинки, если поверхностная плотность в каждой точке пластинки пропорциональна квадрату ее расстояния от центра пластинки.

838. Найти массу квадратной пластинки, в каждой точке которой поверхностная плотность пропорциональна сумме ее расстояний до диагоналей пластинки.

839. Пластинка ограничена параболой $y^2 = 2px$ и ее хордой, проходящей через фокус перпендикулярно к оси параболы. Найти массу пластинки, если в каждой ее точке поверхностная плотность обратно пропорциональна расстоянию точки до директрисы параболы.

840. Найти массу прямоугольника со сторонами a и b, в каждой точке которого поверхностная плотность пропорциональна квадрату расстояния ее от одной данной его вершины.

В задачах 841—843 найти моменты инерции однородных плоских фигур:

841. Прямоугольника со сторонами a и b: 1) относительно стороны a; 2) относительно одной из его вершин; 3) относительно точки пересечения диагоналей.

842. Прямоугольного треугольника с катетами a и b: 1) относительно вершины прямого угла; 2) относительно катета a.

843. Круга радиуса R: 1) относительно касательной; 2) относительно точки на окружности.

844. Найти центр тяжести прямоугольного треугольника, катеты которого равны a и b, если в каждой его точке поверхностная плотность пропорциональна квадрату расстояния ее от вершины прямого угла.

845. Найти центр тяжести расположенной в первом квадранте части эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (пластинки), если в точке (x, y) поверхностная плотность $\delta = kxy$, где k — постоянная.

Найти центры тяжести следующих однородных тел:

846. Полушара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, $z \geqslant 0$.

847. Тетраэдра, ограниченного плоскостями $x + 2y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

848. Шарового слоя, заключенного между сферой $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ и плоскостями $x = a$, $x = b$.

§ 6. Тройной интеграл, его вычисление трехкратным интегрированием

Если функция $f(M)$ непрерывна в каждой точке M некоторой замкнутой пространственной области G и если разбить эту область произвольным способом на n частичных областей с объемами Δv_1,

$\Delta v_2, \ldots, \Delta v_n$, выбрать в каждой из них по одной произвольной точке $M_1, M_2, \ldots, M_n$, вычислить значения функции в этих точках и составить сумму

$$f(M_1)\Delta v_1 + f(M_2)\Delta v_2 + \ldots + f(M_n)\Delta v_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta v_i,$$

то она называется интегральной суммой функции $f(M)$ по области G.

При составлении интегральной суммы можно различными способами разбивать область G на n частичных областей и в каждой из них можно произвольно выбирать одну точку M_i. Поэтому для всякой данной функции $f(M)$ и всякой данной области G можно составить сколько угодно различных интегральных сумм. И все эти интегральные суммы при неограниченном возрастании n и при стремлении к нулю наибольшего из диаметров частичных областей имеют один общий предел, который называется тройным интегралом от функции $f(M)$ по области G и обозначается $\iiint\limits_G f(M)\,dv$.

Свойства тройного интеграла аналогичны свойствам двойного и обыкновенного определенных интегралов: *область интегрирования можно разбивать на части; интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от всех слагаемых; постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.*

Вычисление тройного интеграла сводится к трехкратному интегрированию, т. е. к последовательному вычислению трех обыкновенных (однократных) определенных интегралов по каждой из трех переменных координат точки трехмерного пространства.

Если область интегрирования G отнесена к прямоугольной системе координат $Oxyz$ и если она разбивается на частичные области плоскостями, параллельными координатным плоскостям, то объем частичной области $dv = dx\,dy\,dz$ (как объем прямоугольного параллелепипеда с ребрами dx, dy и dz) и тройной интеграл преобразуется к виду

$$\iiint\limits_G f(M)\,dv = \iiint\limits_G f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

При этом, если область G такова, что любая прямая, проходящая внутри этой области параллельно оси Oz, пересекает ее границу (ограничивающую ее замкнутую поверхность) в двух точках* (черт. 171), то тройной интеграл можно вычислить по

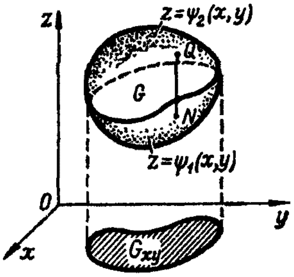
* Если область G имеет более сложный вид, то ее следует разбить на части указанного простого вида и затем вычислить данный интеграл как сумму интегралов по составляющим областям.

формуле

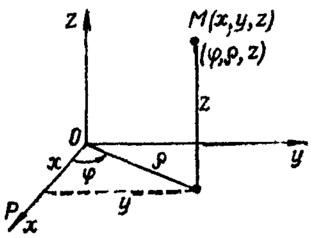
$$\iiint\limits_{G} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{G_{xy}} dx\,dy \int\limits_{z=\psi_1(x,y)}^{z=\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz, \qquad (*)$$

где G_{xy}—проекция области G на плоскость xOy; $z=\psi_1(x, y)$ и $z=\psi_2(x, y)$—уравнения нижней и верхней поверхностей, ограничивающих область G*.

По этой формуле вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению обыкновенного (однократного) определенного интеграла с переменной z, причем x и y рассматриваются как постоянные, и двойного интеграла с переменными x и y по области G_{xy}, расположенной в плоскости xOy.



Черт. 171



Черт. 172

Как правило, пределы внутреннего обыкновенного интеграла являются переменными; они зависят от тех двух переменных, которые в этом интеграле рассматриваются как постоянные. Оба они будут постоянными только в том случае, когда область интегрирования G есть прямой цилиндр, образующие которого параллельны оси Oz, а основания расположены в плоскостях, параллельных плоскости xOy.

Меняя ролями переменные x, y и z в формуле (*), можно получить и другие аналогичные формулы для вычисления тройного интеграла посредством последовательного вычисления обыкновенного и двойного интегралов.

При вычислении тройного интеграла указанным путем после вычисления внутреннего обыкновенного интеграла иногда целесообразно бывает затем, для вычисления двойного интеграла, перейти от прямоугольных координат к полярным, как это разъясняется в § 2. Такой способ вычисления тройного интеграла, отнесенного к прямоугольным координатам, называется вычислением его посредством преобразования к цилиндрическим координатам, ибо, как показано на черт. 172, переменные φ, ρ и z являются цилиндрическими координатами точки $M(x, y, z)$.

* Иначе, $\psi_1(x, y)$ и $\psi_2(x, y)$—апликаты точек N и Q пересечения поверхности, ограничивающей область G, с прямой, проходящей через произвольную внутреннюю точку области G параллельно оси Oz.

Тройной интеграл можно вычислять и иначе, как обыкновенный интеграл от двойного.

849. Вычислить трехкратный интеграл $I=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}dy\int\limits_{0}^{2}(4+z)\,dz$ и построить его область интегрирования.

Решение. Последовательно вычисляем три обыкновенных (однократных) определенных интеграла, начиная с внутреннего:

$$I_1=\int\limits_{0}^{2}(4+z)\,dz=\frac{(4+z)^2}{2}\Big|_0^2=\frac{36-16}{2}=10;$$

$$I_2=\int\limits_{x^2}^{1}I_1\,dy=10\int\limits_{x^2}^{1}dy=10y\Big|_{x^2}^{1}=10(1-x^2);$$

$$I_3=I=\int\limits_{-1}^{1}I_2\,dx=10\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx=10\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{40}{3}.$$

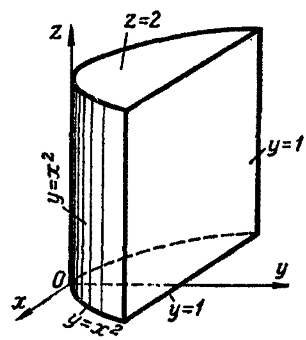
Здесь, как и при вычислении двукратного интеграла, можно пользоваться более краткой записью:

$$I=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}\frac{(4+z)^2}{2}\Big|_0^2dy=10\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}dy=10\int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx=$$
$$=10\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{40}{3}.$$

Для построения области интегрирования данного трехкратного интеграла пишем вначале уравнения поверхностей, ограничивающих эту область. Приравнивая переменную интегрирования каждого интеграла его пределам, получим следующие уравнения:

$x=-1,\ x=1,\ y=x^2,\ y=1,\ z=0,\ z=2.$

Построив в системе координат $Oxyz$ поверхности, соответствующие этим уравнениям (черт. 173), видим, что ограниченная ими область есть прямой цилиндр, образующие которого параллельны оси Oz.



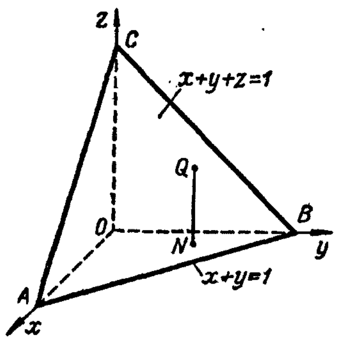
Черт. 173

850. Вычислить тройной интеграл $I=\iiint\limits_G\frac{dx\,dy\,dz}{1-x-y}$, если область G ограничена плоскостями:

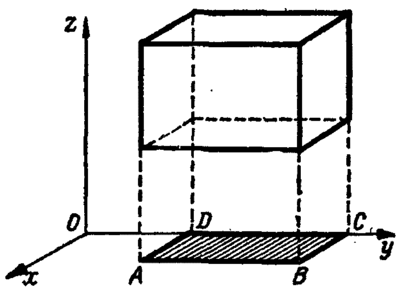
1) $x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0;$
2) $x=0,\ x=1,\ y=2,\ y=5,\ z=2,\ z=4.$

Решение. 1) Построим данные плоскости. Ограниченная ими область G есть тетраэдр $OABC$ (черт. 174). Любая прямая, проходящая внутри этого тетраэдра параллельно оси Oz, пересекает его границу (поверхность) в двух точках. Поэтому, согласно формуле (*), вычисление данного тройного интеграла сводится к последовательному вычислению обыкновенного интеграла с переменной z и двойного интеграла с переменными x и y. Пределами однократного интеграла будут значения $z=z_N=0$ (из уравнения плоскости ABO) и $z=z_Q=1-x-y$ (из уравнения плоскости ABC); областью интегрирования двойного интеграла будет треугольник ABO (проекция тетраэдра на плоскость xOy). Следовательно,

$$I_1=\iint\limits_{ABO}\frac{dx\,dy}{1-x-y}\int\limits_0^{1-x-y}dz.$$



Черт. 174



Черт. 175

Вычисляя внутренний однократный интеграл, а затем двойной интеграл, получим:

$$I_1=\iint\limits_{ABO}\frac{dx\,dy}{1-x-y}\left(z\Big|_0^{1-x-y}\right)=\iint\limits_{ABO}dx\,dy=S_{ABO}=\frac{AO\cdot BO}{2}=\frac{1}{2}.$$

2) Данные плоскости ограничивают прямоугольный параллелепипед, ребра которого параллельны осям координат (черт. 175). При такой простейшей области интегрирования пределы всех трех однократных интегралов, к вычислению которых сводится вычисление тройного интеграла, будут постоянные.

Интегрируя вначале по z, затем по x и по y, получим:

$$I_2=\iint\limits_{ABCD}\frac{dx\,dy}{1-x-y}\int\limits_2^4 dz=\int\limits_2^5 dy\int\limits_0^1 z\Big|_2^4\frac{dx}{1-x-y}=$$

$$=2\int\limits_5^2\ln|1-x-y|\Big|_{x=0}^{x=1}dy=2\int\limits_5^2(\ln|y|-\ln|y-1|)\,dy=$$

$$=2\left[y\ln|y|-(y-1)\ln|y-1|\right]\Big|_5^2=10\ln\frac{4}{5}.\ *$$

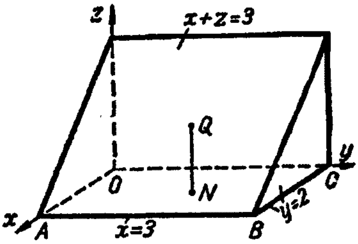
* Последний интеграл (с переменной y) найден по формуле интегрирования по частям, гл. IV, § 4.

851. Вычислить следующие тройные интегралы:

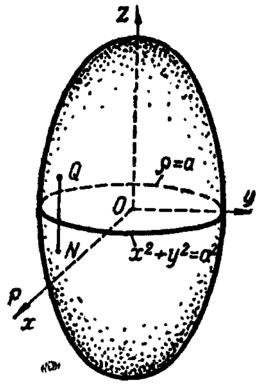
1) $I=\iiint\limits_G \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$, где область G ограничена плоскостями $x+z=3$, $y=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

2) $J=\iiint\limits_W (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, где область W ограничена поверхностью $3(x^2+y^2)+z^2=3a^2$;

3) $K=\iiint\limits_T y\,dx\,dy\,dz$, где область T ограничена поверхностями $y=\sqrt{x^2+z^2}$ и $y=h$, $h>0$.



Черт. 176



Черт. 177

Решение. 1) Построив данные плоскости, получим треугольную призму (черт. 176). Пользуясь формулой (*), имеем:

$$I=\iint\limits_{G_{xy}} dx\,dy \int\limits_{z_N=0}^{z_Q=3-x} (x+y+z+1)^{-3}\,dz=$$

$$=\iint\limits_{ABCO} \frac{(x+y+z+1)^{-2}}{-2}\Bigg|_{z=0}^{z=3-x} dx\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^2 [(x+y+1)^{-2}-(y+4)^{-2}]\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^3\left(\frac{1}{y+4}-\frac{1}{x+y+1}\Bigg|_{y=0}^{y=2}\right)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^3\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}-\frac{1}{12}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|-\frac{x}{12}\right)\Bigg|_0^3=\frac{4\ln 2-1}{8}.$$

2) Область W, ограниченная данной поверхностью, есть эллипсоид вращения (черт. 177). Его проекция W_{xy} на плоскость xOy

есть круг $x^2+y^2 \leqslant a^2$. Применяя формулу (*), получим:

$$J=\iint\limits_{W_{xy}} dx\,dy \int\limits_{z=z_N}^{z=z_Q} (x^2+y^2+z^2)\,dz,$$

где z_N и z_Q — значения z из данного уравнения эллипсоида, $z_{N,\,Q}=\mp\sqrt{3(a^2-x^2-y^2)}$.

Вычисляя внутренний однократный интеграл с переменной z найдем:

$$J=\iint\limits_{W_{xy}} \left[(x^2+y^2)\,z+\frac{z^3}{3}\right]\Bigg|_{z_N}^{z_Q} dx\,dy=2a^2\sqrt{3}\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant a^2} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Далее, чтобы упростить вычисление полученного двойного интеграла, преобразуем его к полярным координатам. Полагая $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$ и заменяя $dx\,dy$ через $\rho\,d\varphi\,d\rho$, получим:

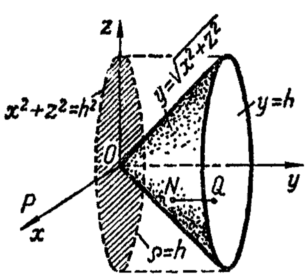
$$J=2a^2\sqrt{3}\iint\limits_{\rho \leqslant a} \sqrt{a^2-\rho^2}\,\rho\,d\varphi\,d\rho=$$

$$=a^2\sqrt{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_a^0 (a^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}}\,d(a^2-\rho^2)=a^2\sqrt{3}\int\limits_0^{2\pi} \frac{2(a^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_a^0 d\varphi=$$

$$=\frac{2a^5\sqrt{3}}{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi=\frac{4\pi a^5}{\sqrt{3}}$$

($\rho=a$ есть полярное уравнение окружности $x^2+y^2=a^2$).

3) Ограниченная данными поверхностями область T есть конус, изображенный на черт. 178. Всякая прямая, проходящая через внутреннюю точку конуса параллельно оси Oy, пересекает его границу в двух точках, а проекция T_{xz} этого конуса на плоскость xOz есть круг $x^2+z^2 \leqslant h^2$. Поэтому, меняя ролями переменные z и y в формуле (*), получим



Черт. 178

$$K=\iint\limits_{T_{xz}} dx\,dz \int\limits_{y=y_N}^{y=y_Q} y\,dy,$$

где $y_N=\sqrt{x^2+z^2}$, $y_Q=h$.

Вычисляем однократный интеграл

$$K=\iint\limits_{T_{xz}} \frac{y^2}{2}\Bigg|_{y_N}^{h} dx\,dz=\frac{1}{2}\iint\limits_{x^2+z^2 \leqslant h^2} (h^2-x^2-z^2)\,dx\,dz,$$

а полученный двойной интеграл преобразуем к полярным координатам (полагая $x=\rho\cos\varphi$, $z=\rho\sin\varphi$ и заменяя $dx\,dz$ через $\rho d\varphi d\rho$):

$$K=\frac{1}{2}\iint\limits_{\rho\leqslant h}(h^2-\rho^2)\,\rho\,d\varphi\,d\rho=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^h(h^2\rho-\rho^3)\,d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{h^2\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^h d\varphi=\frac{h^4}{8}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{\pi h^4}{4}$$

($\rho=h$ есть полярное уравнение окружности $x^2+z^2=h^2$).

852. Вычислить трехкратные интегралы:

1) $\int\limits_0^c dz\int\limits_0^b dy\int\limits_0^a(x^2+y^2+z^2)\,dx$; 2) $\int\limits_0^a y\,dy\int\limits_0^h dx\int\limits_0^{a-y}dz$;

3) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{x}}y\,dy\int\limits_{1-x}^{2-2x}dz$; 4) $\int\limits_0^2 dy\int\limits_{\sqrt{2y-y^2}}^{2}x\,dx\int\limits_0^3 z^2\,dz$

и построить их области интегрирования.

Вычислить тройные интегралы:

853. $\iiint\limits_G(2x+3y-z)\,dx\,dy\,dz$, где G — призма, ограниченная плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=3$, $x+y=2$.

854. $\iiint\limits_G(1-x)^2\sqrt{1-y^2}\,dx\,dy\,dz$, где G — куб, ограниченный плоскостями $x=\pm1$, $y=\pm1$, $z=\pm1$.

855. $\iiint\limits_G\frac{xy}{\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz$, где область G расположена в первом октанте и ограничена конусом $4z^2=x^2+y^2$ и плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=1$.

856. $\iiint\limits_G dx\,dy\,dz$, где G — параллелепипед, ограниченный плоскостями $x+y=1$, $x+y=2$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=3$.

§ 7. Вычисление величин посредством тройного интеграла

1. Объем пространственной области G

$$V=\iiint\limits_G dv=\iiint\limits_G dx\,dy\,dz. \tag{1}$$