а полученный двойной интеграл преобразуем к полярным координатам (полагая $x=\rho\cos\varphi$, $z=\rho\sin\varphi$ и заменяя $dx\,dz$ через $\rho d\varphi d\rho$):

$$K=\frac{1}{2}\iint\limits_{\rho\leqslant h}(h^2-\rho^2)\,\rho\,d\varphi\,d\rho=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^h(h^2\rho-\rho^3)\,d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{h^2\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^h d\varphi=\frac{h^4}{8}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{\pi h^4}{4}$$

($\rho=h$ есть полярное уравнение окружности $x^2+z^2=h^2$).

852. Вычислить трехкратные интегралы:

1) $\int\limits_0^c dz\int\limits_0^b dy\int\limits_0^a(x^2+y^2+z^2)\,dx$; 2) $\int\limits_0^a y\,dy\int\limits_0^h dx\int\limits_0^{a-y}dz$;

3) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{x}}y\,dy\int\limits_{1-x}^{2-2x}dz$; 4) $\int\limits_0^2 dy\int\limits_{\sqrt{2y-y^2}}^{2}x\,dx\int\limits_0^3 z^2\,dz$

и построить их области интегрирования.

Вычислить тройные интегралы:

853. $\iiint\limits_G(2x+3y-z)\,dx\,dy\,dz$, где G — призма, ограниченная плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=3$, $x+y=2$.

854. $\iiint\limits_G(1-x)^2\sqrt{1-y^2}\,dx\,dy\,dz$, где G — куб, ограниченный плоскостями $x=\pm1$, $y=\pm1$, $z=\pm1$.

855. $\iiint\limits_G\frac{xy}{\sqrt{z}}\,dx\,dy\,dz$, где область G расположена в первом октанте и ограничена конусом $4z^2=x^2+y^2$ и плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=1$.

856. $\iiint\limits_G dx\,dy\,dz$, где G — параллелепипед, ограниченный плоскостями $x+y=1$, $x+y=2$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=3$.

§ 7. Вычисление величин посредством тройного интеграла

1. Объем пространственной области G

$$V=\iiint\limits_G dv=\iiint\limits_G dx\,dy\,dz. \qquad (1)$$

2. Масса тела, занимающего область G,

$$m=\iiint\limits_G \delta(M)\,dv=\iiint\limits_G \delta(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz, \tag{2}$$

где $\delta(M)$ — объемная плотность распределения массы в точке $M(x,\ y,\ z)$ тела.

3. Координаты центра тяжести C тела

$$x_C=\frac{m_{yz}}{m},\quad y_C=\frac{m_{xz}}{m},\quad z_C=\frac{m_{xy}}{m}, \tag{3}$$

где m_{yz}, m_{xz} и m_{xy} — статические моменты тела относительно координатных плоскостей:

$$m_{yz}=\iiint\limits_G x\delta\,dx\,dy\,dz,\quad m_{xz}=\iiint\limits_G y\delta\,dx\,dy\,dz,\quad m_{xy}=\iiint\limits_G z\delta\,dx\,dy\,dz.$$

Для однородного тела $\delta=\mathrm{const}$ выносится за знаки интегралов и сокращается.

4. Моменты инерции тела относительно осей Ox, Oy и Oz и начала координат O

$$I_x=\iiint\limits_G (y^2+z^2)\,\delta\,dx\,dy\,dz,\quad I_y=\iiint\limits_G (x^2+z^2)\,\delta\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_z=\iiint\limits_G (x^2+y^2)\,\delta dx\,dy\,dz,\quad I_0=\iiint\limits_G (x^2+y^2+z^2)\,\delta\,dx\,dy\,dz. \tag{4}$$

857. Найти объем тела, ограниченного данными поверхностями:

1) $x+y+z=4,\ x=3,\ y=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0;$

2) $x^2+y^2+z^2=2z,\ x^2+y^2=z^2;$

3) $2z=x^2+y^2,\ y+z=4.$

Решение. 1) Данные плоскости ограничивают шестигранник G (черт. 179). Согласно формуле (1) его объем

$$V=\iiint\limits_G dx\,dy\,dz=\iint\limits_{G_{xy}} dx\,dy\int\limits_0^{4-x-y} dz=\iint\limits_{OABCD}(4-x-y)\,dx\,dy=$$

$$=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^3 (4-x-y)\,dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^{4-y}(4-x-y)\,dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left[(4-y)\,x-\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=3}dy+\int\limits_1^2\left[(4-y)\,x-\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_{x=0}^{x=4-y}dy=$$

$$=\int\limits_0^1\left(\frac{15}{2}-3y\right)dy+\frac{1}{2}\int\limits_1^2(4-y)^2\,dy=$$

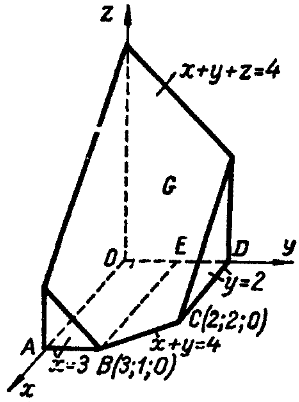
$$=\frac{15}{2}y-\frac{3}{2}y^2\Big|_0^1+\frac{1}{6}(y-4)^3\Big|_1^2=\frac{55}{6}.$$

Здесь при вычислении двойного интеграла по области $OABCD$ пришлось разбить ее прямой BE, параллельной оси Ox, на две части.

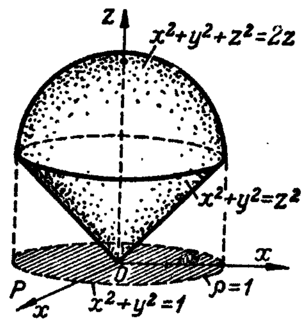
2) Тело, ограниченное сферой $x^2+y^2+z^2=2z$ [с центром в точке (0; 0; 1)] и конусом $x^2+y^2=z^2$, изображено на черт. 180. Его объем

$$V=\iiint\limits_G dx\,dy\,dz=\iint\limits_{G_{xy}} dx\,dy\int\limits_{z=z_k}^{z=z_c} dz=\iint\limits_{G_{xy}}(z_c-z_k)\,dx\,dy,$$

где G—область, занимаемая данным телом; G_{xy}—ее проекция на плоскость xOy; z_k—положительное значение z из уравнения конуса, $z_k=\sqrt{x^2+y^2}$; z_c—большее значение z из уравнения сферы, $z_c=1+\sqrt{1-x^2-y^2}$. Линия, ограничивающая плоскую



Черт. 179



Черт. 180

область G_{xy}, есть окружность $x^2+y^2=1$; ее уравнение получается путем исключения z из данных уравнений сферы и конуса.

Переходя к полярным координатам, найдем:

$$V=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(z_c-z_k)\,dx\,dy=\iint\limits_{\rho\leqslant 1}(1+\sqrt{1-\rho^2}-\rho)\,\rho\,d\varphi\,d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(\rho-\rho^2+\rho\sqrt{1-\rho^2})\,d\rho=\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^3}{3}-\frac{(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]\Bigg|_0^1 d\varphi=\pi.$$

3) Параболоид вращения $2z=x^2+y^2$ и плоскость $y+z=4$ (параллельная оси Ox) ограничивают тело, изображенное на черт. 181.

По формуле (1) объем этого тела

$$V=\iiint\limits_G dx\,dy\,dz=\iint\limits_{G_{xy}} dx\,dy\int\limits_{z_1}^{z_2} dz=\iint\limits_{G_{xy}}(z_2-z_1)\,dx\,dy,$$

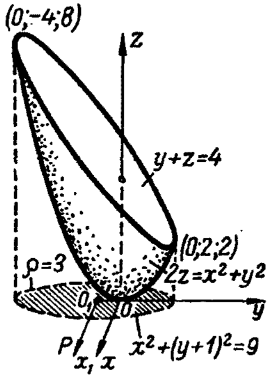
где G — область, занимаемая телом; G_{xy} — круг $x^2+(y+1)^2 \leqslant 9$*; $z_1=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$; $z_2=4-y$.

Чтобы упростить вычисление двойного интеграла, перенесем начало координат в центр указанного круга — в точку $(0; -1)$, а затем перейдем к полярным координатам. При этом переменные x и y заменяются по формулам $x=\rho\cos\varphi$, $y=-1+\rho\sin\varphi$, произведение $dx\,dy$ заменяется произведением $\rho d\varphi d\rho$ и двойной интеграл преобразуется к простому виду:

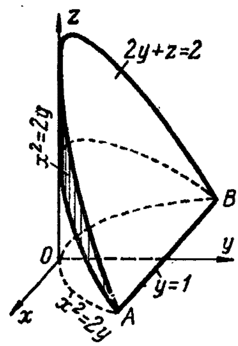
$$V=\frac{1}{2}\iint\limits_{\rho\leqslant 3}(9-\rho^2)\,\rho d\varphi\,d\rho=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^3(9\rho-\rho^3)\,d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{9\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^3 d\varphi=\frac{81}{8}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{81}{4}\pi$$

($\rho=3$ полярное уравнение окружности $x^2+(y+1)^2=9$).



Черт. 181



Черт. 182

858. Найти массу тела, ограниченного цилиндрической поверхностью $x^2=2y$ и плоскостями $y+z=1$, $2y+z=2$, если в каждой его точке объемная плотность численно равна ординате этой точки.

Решение. Согласно условию в точке $M(x, y, z)$ тела объемная плотность $\delta(M)=y$. По формуле (2) масса этого тела

$$m=\iiint\limits_G \delta(M)\,dv=\iiint\limits_G y\,dx\,dy\,dz,$$

где G — область, занимаемая данным телом (черт. 182).

---

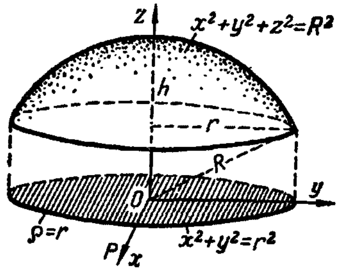
* Уравнение окружности $x^2+(y+1)^2=9$ получено путем исключения z из двух данных уравнений.

Вычисляя тройной интеграл по формуле (*), получим:

$$m=\iint\limits_{G_{xy}} y\,dx\,dy\int\limits_{1-y}^{2(1-y)} dz=\iint\limits_{AOB} y(1-y)\,dx\,dy=\int\limits_0^1 (y-y^2)\,dy\int\limits_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}} dx=$$

$$=\int\limits_0^1 (y-y^2)\,2\sqrt{2y}\,dy=2\sqrt{2}\left(\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}}\right)\Bigg|_0^1=\frac{8\sqrt{2}}{35}.$$

859. Найти центр тяжести сегмента шара, если в каждой его точке объемная плотность пропорциональна ее расстоянию от основания сегмента.



Черт. 183

Решение. Обозначим радиус шара через R, высоту сегмента через h; поместим начало прямоугольной системы координат в центре шара и направим ось апликат по оси сегмента (черт. 183). Уравнения сферы и плоскости, которые ограничивают сегмент (G), будут, соответственно, $x^2+y^2+z^2=R^2$ и $z=R-h$; объемная плотность в точке $M(x, y, z)$ сегмента выразится формулой $\delta=k\,(z-R+h)$. Любое сечение данного неоднородного сегмента плоскостью, параллельной его основанию, есть однородный круг, центр тяжести которого лежит в его центре. Поэтому центр тяжести данного сегмента помещается на его оси, т. е. $x_c=y_c=0$.

Для нахождения апликаты центра тяжести применим формулу (3). Вычислим: 1) статический момент I_{xy} и 2) массу m сегмента.

$$1)\quad I_{xy}=\iiint\limits_G z\delta\,dx\,dy\,dz=k\iiint\limits_G (z-a)\,z\,dx\,dy\,dz,\quad a=R-h.$$

Преобразуем тройной интеграл в двойной от простого:

$$I_{xy}=k\iint\limits_{G_{xy}} dx\,dy\int\limits_a^{z_1}(z^2-az)\,dz,$$

где G_{xy} — круг $x^2+y^2\leqslant r^2$, $r^2=R^2-a^2$; $z_1=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

Вычисляем внутренний простой интеграл:

$$I_1=\frac{z^3}{3}-\frac{az^2}{2}\Bigg|_a^{z_1}=\frac{1}{3}\left[(R^2-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}-a^3\right]-\frac{a}{2}(R^2-x^2-y^2-a^2).$$

Подставляем этот результат в предыдущее равенство и вычисляем полученный двойной интеграл, переходя к полярным координатам:

$$I_{xy}=k\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2} I_1\,dx\,dy=k\iint\limits_{\rho\leqslant r}\left[\frac{1}{3}(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{a^3}{6}-\right.$$

$$\left.-\frac{a}{2}(R^2-\rho^2)\right]\rho d\varphi\,d\rho=k\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{a^3\rho^2}{12}-\frac{1}{15}(R^2-\rho^2)^{\frac{5}{2}}+\right.$$

$$\left.+\frac{a}{8}(R^2-\rho^2)^2\right]\Big|_0^r d\varphi=2k\pi\left\{\frac{a^3r^2}{12}+\frac{1}{15}\left[R^5-(R^2-r^2)^{\frac{5}{2}}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{a}{8}\left[(R^2-r^2)^2-R^4\right]\right\}.$$

Исключая вспомогательные постоянные r и a, после упрощений, получим

$$I_{xy}=\frac{k\pi h^3}{60}(20R^2-15Rh+3h^2).$$

$$2)\quad m=\iiint\limits_G \delta\,dx\,dy\,dz=k\iiint\limits_G (z-a)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=k\iint\limits_{G_{xy}} dx\,dy\int\limits_a^{z_1}(z-a)\,dz=\frac{k}{2}\iint\limits_{G_{xy}}(z-a)^2\Big|_a^{z_1}dx\,dy=$$

$$=\frac{k}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant r^2}\left(\sqrt{R^2-x^2-y^2}-a\right)^2dx\,dy=\frac{k}{2}\iint\limits_{\rho\leqslant r}\left(\sqrt{R^2-\rho^2}-a\right)^2\rho\,d\varphi\,d\rho=$$

$$=\frac{k}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^r\left[R^2-\rho^2-2a(R^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}}+a^2\right]\rho d\varphi\,d\rho=$$

$$=\frac{k}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^2}{2}(R^2+a^2)-\frac{\rho^4}{4}+\frac{2a}{3}(R^2-\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^r=\frac{k\pi h^3(4R-h)}{12}.$$

Согласно формуле (3) искомая апликата центра тяжести данного сегмента

$$z_C=\frac{I_{xy}}{m}=\frac{20R^2-15Rh+3h^2}{5(4R-h)}.$$

Для полушара при $h=R$ имеем

$$I_{xy}=\frac{2k\pi R^5}{15};\quad m=\frac{k\pi R^4}{4};\quad z_C=\frac{8R}{15}.$$

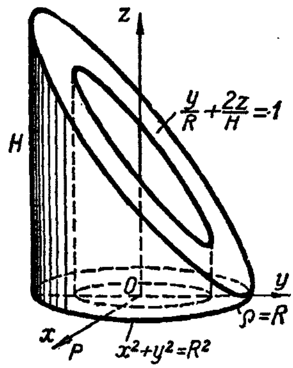
860. Найти центр тяжести однородного полого усеченного цилиндра (черт. 184) и момент инерции этого цилиндра относительно его оси.

Решение. Обозначим внешний и внутренний радиусы цилиндра через R и r, а его высоту через H. Тогда относительно указанной на черт. 184 прямоугольной системы координат уравнения цилиндрических поверхностей и плоскостей, ограничивающих цилиндр (G), будут

$$x^2+y^2=R^2; \quad x^2+y^2=r^2; \quad z=0; \quad Hy+2Rz=HR.$$

Абсцисса центра тяжести данного однородного цилиндра равна нулю, поскольку он симметричен относительно плоскости yOz. Ординату и апликату центра тяжести найдем по формулам (3), полагая в них $\delta=1$,

$$1)\ I_{xz}=\iiint\limits_G y\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{G_{xy}} y\,dx\,dy\int\limits_0^{z_\text{п}} dz,$$



Черт. 184

где G_{xy} — круговое кольцо $r^2\leqslant x^2+$ $+y^2\leqslant R^2$; $z_\text{п}=\frac{H}{2}\left(1-\frac{y}{R}\right)$.

Последовательно вычисляя внутренний простой интеграл, затем двойной (с переходом к полярным координатам), получим:

$$I_{xz}=\frac{H}{2}\iint\limits_{r^2\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2} y\left(1-\frac{y}{R}\right)dx\,dy=\frac{H}{2}\iint\limits_{r\leqslant\rho\leqslant R}\rho\sin\varphi\left(1-\frac{\rho\sin\varphi}{R}\right)\rho\,d\varphi\,d\rho=$$

$$=\frac{H}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int\limits_r^R\left(\rho^2-\frac{\rho^3\sin\varphi}{R}\right)d\rho=$$

$$=\frac{H}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{R^3-r^3}{3}-\frac{R^4-r^4}{4R}\sin\varphi\right)\sin\varphi\,d\varphi=\frac{H}{2}\left[\frac{r^3-R^3}{3}\cos\varphi-\right.$$

$$\left.-\frac{R^4-r^4}{4R}\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\right]\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{\pi H(r^4-R^4)}{8R}.$$

$$2)\ I_{xy}=\iiint\limits_G z\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{G_{xy}}dx\,dy\int\limits_0^{z_\text{п}} z\,dz=$$

$$=\frac{H^2}{8}\iint\limits_{r^2\leqslant x^2+y^2\leqslant R^2}\left(1-\frac{y}{R}\right)^2dx\,dy=\frac{H^2}{8}\iint\limits_{r\leqslant\rho\leqslant R}\left(1-\frac{\rho\sin\varphi}{R}\right)^2\rho\,d\varphi\,d\rho=$$

$$=\frac{H^2}{8}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_r^R\left(\rho-\frac{2\rho^2\sin\varphi}{R}+\frac{\rho^3\sin^2\varphi}{R^2}\right)d\rho=\frac{H^2}{8}\int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{R^2-r^2}{2}-\right.$$

$$\left.-\frac{2(R^3-r^3)\sin\varphi}{3R}+\frac{(R^4-r^4)\sin^2\varphi}{4R^2}\right]d\varphi=\frac{\pi H^2(R^2-r^2)(3R^2-r^2)}{32R^2}.$$

3) Масса m данного полого усеченного цилиндра в предположении, что его плотность $\delta=1$, численно равна объему V этого

цилиндра. Его можно найти или по формуле (1) или элементарным путем как половину объема полого неусеченного цилиндра:

$$m = V = \frac{\pi H\,(R^2 - r^2)}{2}.$$

Подставляя значения I_{xz}, I_{xy} и m в формулы (3), получим:

$$y_C = \frac{I_{xz}}{m} = -\frac{R^2 + r^2}{4R}; \quad z_C = \frac{I_{xy}}{m} = \frac{H\,(3R^2 - r^2)}{16R^2}.$$

Момент инерции данного цилиндра относительно его оси находим по формуле (4):

$$I_z = \iiint\limits_G \delta\,(x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz = \delta \iint\limits_{G_{xy}} (x^2 + y^2)\,dx\,dy \int\limits_0^{z_\text{п}} dz =$$

$$= \frac{\delta H}{2} \iint\limits_{r^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R^2} (x^2 + y^2)\left(1 - \frac{y}{R}\right) dx\,dy =$$

$$= \frac{\delta H}{2} \iint\limits_{r \leqslant \rho \leqslant R} \rho^2 \left(1 - \frac{\rho \sin\varphi}{R}\right) \rho\,d\varphi\,d\rho =$$

$$= \frac{\delta H}{2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_r^R \left(\rho^3 - \frac{\rho^4 \sin\varphi}{R}\right) d\rho = \frac{\delta H}{2} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^5 \sin\varphi}{5R}\bigg|_{\rho = r}^{\rho = R}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{\delta H}{2} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{R^4 - r^4}{4} - \frac{R^5 - r^5}{5R} \sin\varphi\right) d\varphi = \frac{\pi\delta H\,(R^4 - r^4)}{4}.$$

Найти объемы тел, ограниченных поверхностями:

861. Сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$ и параболоидом $x^2 + y^2 = 2az$.

862. Цилиндрами $x^2 = y$, $x^2 = 4 - 3y$ и плоскостями $z = 0$, $z = 9$.

863. Конусом $x^2 + y^2 = z^2$ и параболоидом $x^2 + y^2 = 6 - z$; $z \geqslant 0$.

864. Цилиндром $x^2 + y^2 = Rx$ и сферой $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

865. Части эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, расположенной в первом октанте между плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и $bx + ay = ab$.

866. Найти массу куба, если в каждой его точке объемная плотность численно равна сумме ее расстояний до трех граней этого куба, проходящих через одну данную его вершину.

867. Найти массу цилиндра $x^2 + y^2 \leqslant r^2$, $0 \leqslant z \leqslant h$ и его момент инерции относительно диаметра основания, если объемная плотность в каждой точке цилиндра пропорциональна квадрату расстояния ее от его оси.

868. Найти массу вещества, заполняющего общую часть двух шаров $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$ и $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2Rz$, если его плотность в каждой точке пропорциональна расстоянию ее до плоскости xOy.

869. Найти центр тяжести:

1) однородного тела, ограниченного параболоидом $c(x^2+y^2)=2a^2z$ и конусом $c^2(x^2+y^2)=a^2z^2$;

2) восьмой части однородного эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$, расположенной в первом октанте;

3) полушара $0\leqslant z\leqslant\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, у которого объемная плотность в каждой точке численно равна ее расстоянию от центра его основания.

870. Неоднородное тело ограничено плоскостями $x=2$, $y=0$, $y=1$, $z=0$ и цилиндром $z^2=6x$. Объемная плотность вещества в каждой его точке пропорциональна ее расстоянию от плоскости xOy. Найти момент инерции этого тела относительно оси Oz.

871. Найти полярный момент инерции (относительно начала координат) однородного тела, ограниченного конусом $z^2=x^2-y^2$ и сферой $x^2+y^2+z^2=R^2$.

§ 8. Криволинейные интегралы, их вычисление и условие независимости от линии интегрирования

Если функция $f(M)$ непрерывна в каждой точке M дуги AB и если разбить эту дугу произвольным способом на n частичных дуг длиною $\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots, \Delta l_n$, выбрать на каждой из них по одной произвольной точке $M_1, M_2, \ldots, M_n$, вычислить значения функции в этих точках и составить сумму

$$f(M_1)\Delta l_1+f(M_2)\Delta l_2+\ldots+f(M_n)\Delta l_n=\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\Delta l_i,$$

то она называется интегральной суммой функции $f(M)$ по дуге AB.

Очевидно при этом, что для всякой данной функции $f(M)$ и всякой данной дуги AB можно составить бесчисленное множество различных интегральных сумм,—если по-разному делить эту дугу на n частичных дуг и по-разному выбирать на каждой из них по одной точке M_i.

Но при неограниченном увеличении n и при стремлении к нулю наибольшей из длин частичных дуг все эти различные интегральные суммы имеют один общий предел, который называется криволинейным интегралом от функции $f(M)$ *по длине дуги* AB и обозначается $\int\limits_{AB} f(M)\,dl$.

Криволинейные интегралы $\int\limits_{AB} P(M)\,dx$, $\int\limits_{AB} Q(M)\,dy$ или $\int\limits_{AB} R(M)\,dz$ *по координатам* x, y или z определяются аналогично, как пределы интегральных сумм функций $P(M)$, $Q(M)$ или $R(M)$, взятых по дуге AB, с той лишь разницей, что при