1) однородного тела, ограниченного параболоидом $c(x^2+y^2)=2a^2z$ и конусом $c^2(x^2+y^2)=a^2z^2$;

2) восьмой части однородного эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$, расположенной в первом октанте;

3) полушара $0\leqslant z\leqslant\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, у которого объемная плотность в каждой точке численно равна ее расстоянию от центра его основания.

870. Неоднородное тело ограничено плоскостями $x=2$, $y=0$, $y=1$, $z=0$ и цилиндром $z^2=6x$. Объемная плотность вещества в каждой его точке пропорциональна ее расстоянию от плоскости xOy. Найти момент инерции этого тела относительно оси Oz.

871. Найти полярный момент инерции (относительно начала координат) однородного тела, ограниченного конусом $z^2=x^2-y^2$ и сферой $x^2+y^2+z^2=R^2$.

§ 8. Криволинейные интегралы, их вычисление и условие независимости от линии интегрирования

Если функция $f(M)$ непрерывна в каждой точке M дуги AB и если разбить эту дугу произвольным способом на n частичных дуг длиною $\Delta l_1, \Delta l_2, \ldots, \Delta l_n$, выбрать на каждой из них по одной произвольной точке $M_1, M_2, \ldots, M_n$, вычислить значения функции в этих точках и составить сумму

$$f(M_1)\Delta l_1+f(M_2)\Delta l_2+\ldots+f(M_n)\Delta l_n=\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\Delta l_i,$$

то она называется интегральной суммой функции $f(M)$ по дуге AB.

Очевидно при этом, что для всякой данной функции $f(M)$ и всякой данной дуги AB можно составить бесчисленное множество различных интегральных сумм,—если по-разному делить эту дугу на n частичных дуг и по-разному выбирать на каждой из них по одной точке M_i.

Но при неограниченном увеличении n и при стремлении к нулю наибольшей из длин частичных дуг все эти различные интегральные суммы имеют один общий предел, который называется криволинейным интегралом от функции $f(M)$ по длине дуги AB и обозначается $\int\limits_{AB} f(M)\,dl$.

Криволинейные интегралы $\int\limits_{AB} P(M)\,dx$, $\int\limits_{AB} Q(M)\,dy$ или $\int\limits_{AB} R(M)\,dz$ по координатам x, y или z определяются аналогично, как пределы интегральных сумм функций $P(M)$, $Q(M)$ или $R(M)$, взятых по дуге AB, с той лишь разницей, что при составлении этих сумм значения функции в точках M_i умножаются не на длины частичных дуг Δl_i, а на их проекции Δx_i, Δy_i или Δz_i на координатные оси.

Криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ обозначает сумму криволинейных интегралов указанных видов.

Криволинейный интеграл по замкнутой плоской линии l при положительном направлении ее обхода (против движения часовой стрелки) обозначается $\oint\limits_{+l}$, а при отрицательном направлении обхода обозначается $\oint\limits_{-l}$.

Обыкновенный (прямолинейный) определенный интеграл является частным случаем криволинейного интеграла, у которого линией интегрирования служит прямолинейный отрезок оси координат.

При перемене направления на кривой интегрирования криволинейный интеграл (по координатам) изменяет свой знак: $\int\limits_{AB} = -\int\limits_{BA}$.

Кривую интегрирования можно разбивать на части:

$$\int\limits_{AB} = \int\limits_{AC} + \int\limits_{CB}.$$

Вычисление криволинейного интеграла $\int\limits_{AB}$ сводится к вычислению обыкновенного определенного интеграла: исходя из уравнения (или уравнений) линии интегрирования AB подынтегральное выражение криволинейного интеграла преобразуется к одной переменной, значения которой в начале и в конце дуги AB будут пределами полученного обыкновенного интеграла.

Обычно криволинейный интеграл $\int\limits_{AB}$ *зависит от линии интегрирования. Взятый вдоль разных линий, соединяющих точки A и B, он будет иметь различные значения.*

Но если в некоторой односвязной области D выражение $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ является полным дифференциалом, то криволинейный интеграл* $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$ *не зависит от линии интегрирования, соединяющей точки A и B, а взятый по любой замкнутой линии, пролегающей в области D, равен нулю.*

---

* Плоская область называется односвязной, если любая замкнутая линия, лежащая в этой области, может быть стянута в точку, оставаясь в этой области.

Выражение $P(x, y)dx+Q(x, y)dy$ будет полным дифференциалом функции $u(x, y)$ в некоторой односвязной области D, если $P'_y=Q'_x$ и если P, Q, P'_y, Q'_x непрерывны в этой области.

872. Вычислить криволинейный интеграл $I=\int\limits_L (xy-1)\,dx+ +x^2y\,dy$ от точки $A(1;\ 0)$ до точки $B(0;\ 2)$:

1) по прямой $2x+y=2$;

2) по дуге параболы $4x+y^2=4$;

3) по дуге эллипса $x=\cos t$, $y=2\sin t$ (черт. 185).

Решение. 1) Пользуясь данным уравнением линии интегрирования, преобразуем криволинейный интеграл в обыкновенный определенный интеграл с переменной x, затем вычисляем его:

$$y=2-2x, \quad dy=-2dx,$$

$$I_1=\int\limits_{x_A}^{x_B}[x(2-2x)-1]\,dx+x^2(2-2x)(-2dx)=$$

$$=\int\limits_1^0(4x^3-6x^2+2x-1)\,dx=x^4-2x^3+x^2-x\Big|_1^0=1.$$

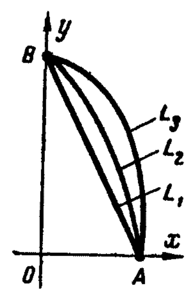
2) Здесь удобно преобразовать криволинейный интеграл в обыкновенный интеграл с переменной y:

$$x=1-\frac{y^2}{4},\ dx=-\frac{y}{2}\,dy,$$

$$I_2=\int\limits_{y_A=0}^{y_B=2}\left[\left(1-\frac{y^2}{4}\right)y-1\right]\left(-\frac{y}{2}\,dy\right)+$$

$$+\left(1-\frac{y^2}{4}\right)^2 y\,dy=\int\limits_0^2\left(\frac{y^5}{16}+\frac{y^4}{8}-\frac{y^3}{2}-\frac{y^2}{2}+\frac{3y}{2}\right)dy=$$

$$=\frac{y^6}{96}+\frac{y^5}{40}-\frac{y^4}{8}-\frac{y^3}{6}+\frac{3y^2}{4}\Big|_0^2=-\frac{1}{5}.$$



Черт. 185

3) Преобразуем данный интеграл в обыкновенный с переменной t, затем вычисляем его: $x=\cos t$, $dx=-\sin t\,dt$; $y=2\sin t$, $dy=2\cos t\,dt$:

$$I_3=\int\limits_{t_A=0}^{t_B=\frac{\pi}{2}}(\cos t\cdot 2\sin t-1)(-\sin t\,dt)+\cos^2 t\cdot 2\sin t\cdot 2\cos t\,dt=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos^3 t\sin t+\sin t-2\sin^2 t\cos t)\,dt=-4\int\cos^3 t\,d\cos t+$$

$$+\int\sin t\,dt-2\int\sin^2 t\,d\sin t\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\cos^4 t-\cos t-\frac{2}{3}\sin^3 t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}.$$

(Значения параметра t в точках A и B найдены из данных параметрических уравнений эллипса по известным координатам этих точек.)

873. Вычислить криволинейный интеграл $I=\int\limits_L (4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y})\,dl$ между точками $E(-1;\ 0)$ и $H(0;\ 1)$:

1) по прямой EH;

2) по дуге астроиды $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t$.

Решение. 1) Вначале составляем уравнение линии интегрирования — прямой EH, как уравнение прямой, проходящей через две известные точки: $y-x=1$.

Пользуясь этим уравнением и известной формулой для дифференциала дуги плоской кривой (гл. V, § 6), преобразуем данный криволинейный интеграл в обыкновенный интеграл с переменной x и вычисляем его:

$$y=x+1,\quad y'=1;\quad dl=\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\sqrt{2}\,dx;$$

$$I_1=\int\limits_{x_E=-1}^{x_H=0}(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{x+1})\sqrt{2}\,dx=\sqrt{2}\left[4\int x^{\frac{1}{3}}dx-\right.$$

$$\left.-3\int (x+1)^{\frac{1}{2}}d(x+1)\right]\Big|_{-1}^{0}=\sqrt{2}\left[3x^{\frac{4}{3}}-2(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_{-1}^{0}=-5\sqrt{2}.$$

2) Преобразуем данный интеграл в обыкновенный с переменной t, затем вычисляем:

$$x=\cos^3 t,\quad dx=-3\cos^2 t\sin t\,dt;\quad y=\sin^3 t,\quad dy=3\sin^2 t\cos t\,dt;$$

$$dl=\sqrt{dy^2+dx^2}=3\,|\sin t\cos t|\,dt=-3\sin t\cos t\,dt,\ \text{ибо}\ \frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\pi;$$

$$I_2=\int\limits_{t_E=\pi}^{t_H=\frac{\pi}{2}}(4\cos t-3\sqrt{\sin^3 t})\,3\sin t\cos t\,dt=-12\int\cos^2 t\,d\cos t-$$

$$-9\int\sin^{\frac{5}{2}}t\,d\sin t\,\Big|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}=-4\cos^3 t-\frac{18}{7}\sin^{\frac{7}{2}}t\,\Big|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{46}{7}.$$

874. Даны точки $A(3;-6;\ 0)$ и $B(-2;\ 4;\ 5)$. Вычислить криволинейный интеграл $I=\int\limits_C xy^2\,dx+yz^2\,dy-zx^2\,dz$:

1) по прямолинейному отрезку OB и

2) по дуге AB окружности, заданной уравнениями $x^2+y^2+z^2=45,\ 2x+y=0$.

Решение. 1) Вначале составляем уравнения линии интегрирования — прямой OB. Пользуясь общими уравнениями прямой, проходящей через две точки $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$, получим $\frac{x}{-2}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}$. Приравнивая эти равные отношения параметру t, преобразуем полученные канонические уравнения прямой OB к параметрическому виду: $x=-2t$, $y=4t$, $z=5t$.

Далее, пользуясь этими уравнениями, преобразуем данный криволинейный интеграл в обыкновенный интеграл с переменной t, затем вычисляем его

$$I_1=\int\limits_{t_0=0}^{t_B=1} -2t(4t)^2(-2dt)+4t(5t)^2 4dt-5t(-2t)^2 5dt=$$

$$=364\int\limits_0^1 t^3\,dt=91.$$

2) Преобразуем данные уравнения окружности к параметрическому виду. Полагая $x=t$, получим $y=-2t$ (из второго данного уравнения), $z=\sqrt{45-5t^2}$ (из первого уравнения). Отсюда $dx=dt$, $dy=-2dt$, $dz=-\frac{5t\,dt}{\sqrt{45-5t^2}}$ и

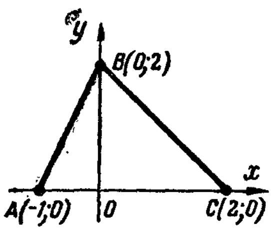
$$I_2=\int\limits_{t_A=3}^{t_B=-2} t(-2t)^2dt+(-2t)(45-5t^2)(-2dt)-$$

$$-\sqrt{45-5t^2}\,t^2\left(-\frac{5t\,dt}{\sqrt{45-5t^2}}\right)=\int\limits_3^{-2}(180t-17t^3)\,dt=-173\frac{3}{4}.$$

875. Вычислить криволинейные интегралы:

$$1)\ \oint\limits_{-l} 2x\,dx-(x+2y)\,dy \quad \text{и} \quad 2)\ \oint\limits_{+l} y\cos x\,dx+\sin x\,dy$$

вдоль периметра треугольника с вершинами $A(-1;\ 0)$, $B(0;\ 2)$ и $C(2;\ 0)$.



Черт. 186

Решение. 1) Здесь (черт. 186) линия интегрирования (замкнутая) состоит из трех отрезков, которые лежат на различных прямых (с различными уравнениями). Соответственно этому криволинейный интеграл по ломаной $ABCA$ вычисляем как сумму интегралов, взятых по отрезкам AB, BC и CA.

Составив уравнение прямой AB, $y-2x=2$, и исходя из этого уравнения, преобразуем криволинейный интеграл на отрезке AB в обыкновенный интеграл с переменной x:

$$y=2x+2,\quad dy=2dx,\quad \int\limits_{AB}=-8\int\limits_{x_A=-1}^{x_B=0}(x+1)\,dx=$$

$$=-4(x+1)^2\Big|_{-1}^{0}=-4.$$

Аналогичным путем вычисляя криволинейный интеграл на отрезках BC и CA, получим

$$x=2-y,\ dx=-dy,\quad \int\limits_{BC}=\int\limits_{y_B=2}^{y_C=0}(y-6)\,dy=\frac{(y-6)^2}{2}\Bigg|_2^0=10;$$

$$y=0,\quad dy=0,\ \int\limits_{CA}=2\int\limits_{x_C=2}^{x_A=-1}x\,dx=x^2\Big|_2^{-1}=-3.$$

Следовательно,

$$\oint\limits_{ABCA}=\int\limits_{AB}+\int\limits_{BC}+\int\limits_{CA}=-4+10-3=3.$$

2) Здесь подынтегральное выражение есть полный дифференциал функции двух переменных, ибо $(y\cos x)'_y=(\sin x)'_x=\cos x$. Вследствие этого данный криволинейный интеграл, взятый по периметру данного треугольника, равен нулю. Он будет равен нулю и по любому другому замкнутому контуру.

Вычислить криволинейные интегралы:

876. $\int\limits_{OA}y(x-y)\,dx+x\,dy$ по линиям: 1) $y=2x$; 2) $y=2x^2$; 3) $y^2=4x$; $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 2)$.

877. $\oint\limits_{+C}(x^2-y)\,dx$ вдоль периметра прямоугольника, образованного прямыми $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=2$.

878. $\int\limits_{AB}\frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$ по отрезку прямой $x-2y=4$; $A(0;\ -2)$, $B(4;\ 0)$.

879. $\int\limits_{OC}y\,dx+z\,dy+x\,dz$: 1) по отрезку прямой OC и 2) по ломаной $OABC$; $O(0;\ 0;\ 0)$, $A(1;\ 0;\ 0)$, $B(1;\ 1;\ 0)$, $C(1;\ 1;\ 1)$.

880. $\oint\limits_{-C}(x^2-y^2)\,dx+(x^2+y^2)\,dy$ по эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

881. $\int\limits_{MN}2y\sin 2x\,dx-\cos 2x\,dy$ по любой линии; $M\left(\frac{\pi}{4};\ 2\right)$, $N\left(\frac{\pi}{6};\ 1\right)$.

882. $\int\limits_{AB}(yxe^x\,dx+(x-1)\,e^x\,dy$ по любой линии; $A(0;\ 2)$, $B(1;\ 2)$.

883. $\oint\limits_{+G}2x(y-1)\,dx+x^2\,dy$ по контуру фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=9$.