§ 9. Вычисление величин посредством криволинейных интегралов

Криволинейные интегралы, как и все другие определенные интегралы, служат для вычисления различных геометрических и физических величин.

Наиболее просто посредством криволинейных интегралов вычисляются следующие величины:

1) Длина дуги AB плоской или пространственной линии

$$L_{AB}=\int_{AB} dl. \tag{1}$$

2) Площадь фигуры, расположенной в плоскости xOy и ограниченной замкнутой линией C,

$$S=\frac{1}{2}\oint_{+C} x\,dy-y\,dx. \tag{2}$$

3) Масса материальной дуги AB

$$m=\int_{AB} \delta(M)\,dl, \tag{3}$$

где $\delta(M)$ — линейная плотность вещества в точке M дуги.

4) Координаты центра тяжести C дуги AB

$$x_C=\frac{\int_{AB} x\,\delta(M)\,dl}{m};\quad y_C=\frac{\int_{AB} y\,\delta(M)\,dl}{m};\quad z_C=\frac{\int_{AB} z\,\delta(M)\,dl}{m}. \tag{4}$$

(В случае равномерного распределения массы $\delta=\text{const}$ выносится за знаки интегралов и сокращается.)

5) Работа, совершаемая силой $\bar{F}\{P, Q, R\}$, действующей на точку при перемещении ее по дуге AB,

$$E=\int_{AB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz. \tag{5}$$

884. Найти длину кардиоиды $x=2a\cos t-a\cos 2t$, $y=2a\sin t-a\sin 2t$.

Решение. Применяем формулу (1); исходя из данных параметрических уравнений кардиоиды и формулы для дифференциала дуги плоской кривой (гл. 5, § 6), преобразуем криволинейный интеграл формулы (1) в обыкновенный интеграл с переменной t.

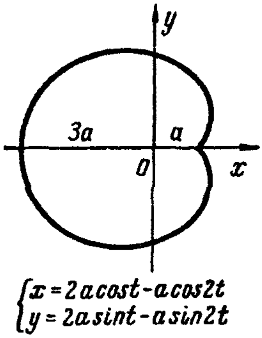
$$\dot{x}=-2a\sin t+2a\sin 2t,\qquad \dot{y}=2a\cos t-2a\cos 2t,$$

$$dl=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=4a\sin\frac{t}{2}\,dt.$$

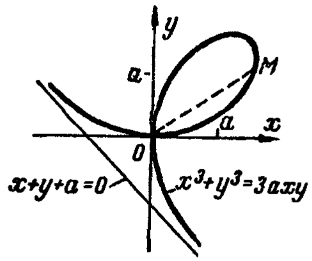
Вся кардиоида (черт. 187) получается при изменении t от 0 до 2π. Поэтому

$$L=4a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-8a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=16a.$$

885. Найти площадь, ограниченную замкнутой кривой:
1) эллипсом $x=a\cos t$, $y=b\sin t$;
2) петлей декартова листа $x^3+y^3-3axy=0$.



Черт. 187



Черт. 188

Решение. 1) Применяем формулу (2). Исходя из данных параметрических уравнений эллипса, преобразуем криволинейный интеграл в обыкновенный интеграл с переменной t и вычисляем его:

$$S=\frac{1}{2}\oint_{+C}x\,dy-y\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a\cos t\,d(b\sin t)-b\sin t\,d(a\cos t)=$$

$$=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}dt=\pi ab.$$

2) Вначале преобразуем данное уравнение к параметрическому виду. Полагая $y=xt$, получим $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$.

Геометрически параметр $t=\frac{y}{x}$ есть угловой коэффициент полярного радиуса OM (черт. 188); точка $M(x, y)$ опишет всю петлю кривой при изменении t от 0 до $+\infty$.

Преобразуя криволинейный интеграл формулы (2) в обыкновенный интеграл с переменной t, получим

$$S=\frac{1}{2}\oint_{+C}x\,dy-y\,dx=\frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2dt}{(1+t^3)^2}=$$

$$=\frac{3a^2}{2}\lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{\beta}(1+t^3)^{-2}d(1+t^3)=\frac{3a^2}{2}\lim\frac{1}{1+t^3}\Big|_{\beta}^{0}=\frac{3a^2}{2}.$$

886. Найти массу дуги AB кривой $y = \ln x$, если в каждой ее точке линейная плотность пропорциональна квадрату абсциссы точки; $x_A = 1$, $x_B = 3$.

Решение. Применяем формулу (3). Исходя из данного уравнения кривой, преобразуем криволинейный интеграл формулы (3) в обыкновенный с переменной x:

$$y' = \frac{1}{x}, \quad dl = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,dx, \quad \delta = kx^2;$$

$$m = \int\limits_{AB} \delta\,dl = k\int\limits_1^3 x^2 \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\,dx = \frac{k}{2}\int\limits_1^3 (x^2+1)^{\frac{1}{2}}\,d(x^2+1) =$$

$$= \frac{k}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^3 = \frac{k}{3}\left(10\sqrt{10} - 2\sqrt{2}\right) \approx 9{,}6\ k.$$

887. Найти координаты центра тяжести дуги AB винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, если в каждой ее точке линейная плотность пропорциональна аппликате этой точки; $t_A = 0$, $t_B = \pi$.

Решение. Применяем формулы (4). Вычислим криволинейные интегралы, содержащиеся в этих формулах, преобразуя их в обыкновенные интегралы с переменной t:

$$\dot{x} = -a\sin t, \ \dot{y} = a\cos t, \ \dot{z} = b; \ dl = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,dt;$$

$$I_1 = \int\limits_{AB} x\delta\,dl = \int\limits_0^\pi a\cos t \cdot kbt\sqrt{a^2+b^2}\,dt =$$

$$= akb\sqrt{a^2+b^2}\,(t\sin t + \cos t)\Big|_0^\pi = -2abk\sqrt{a^2+b^2};$$

$$I_2 = \int\limits_{AB} \delta\,dl = \int\limits_0^\pi kbt\sqrt{a^2+b^2}\,dt = kb\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{t^2}{2}\Big|_0^\pi =$$

$$= \frac{bk\pi^2}{2}\sqrt{a^2+b^2};$$

$$I_3 = \int\limits_{AB} y\delta\,dl = \int\limits_0^\pi a\sin t \cdot kbt\sqrt{a^2+b^2}\,dt =$$

$$= abk\sqrt{a^2+b^2}\,(\sin t - t\cos t)\Big|_0^\pi = abk\pi\sqrt{a^2+b^2};$$

$$I_4 = \int\limits_{AB} z\delta\,dl = \int\limits_0^\pi btkbt\sqrt{a^2+b^2}\,dt = \frac{kb^2\pi^3}{3}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Следовательно, $x_C = \frac{I_1}{I_2} = -\frac{4a}{\pi^2}$; $y_C = \frac{I_3}{I_2} = \frac{2a}{\pi}$; $z_C = \frac{I_4}{I_2} = \frac{2}{3}b\pi$.

888. Вычислить работу, совершаемую силой тяжести при перемещении точки массы m по дуге AB некоторой кривой.

Решение. Если выбрать прямоугольную систему координат так, чтобы направление оси Oz совпало с направлением силы тяжести, то действующая на точку сила $\bar{F}=mg\bar{k}$, а ее проекции на оси координат $F_x=P=0$, $F_y=Q=0$, $F_z=R=mg$.

Согласно формуле (5) искомая работа

$$E=\int_{AB} P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int_{AB} mg\,dz=mg\int_{z_A}^{z_B} dz=mg\,(z_B-z_A).$$

Она зависит только от разности аппликат начала и конца пути, но не зависит от формы пути.

889. Найти работу силового поля, в каждой точке (x, y) которого напряжение (сила, действующая на единицу массы) $\bar{p}=(x+y)\bar{i}-x\bar{j}$, когда точка массы m описывает окружность $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, двигаясь по ходу часовой стрелки.

Решение. Подставляя в формулу (5) проекции силы $\bar{F}=m\bar{p}$, действующей на точку: $F_x=m(x+y)$, $F_y=-mx$, и преобразуя криволинейный интеграл в обыкновенный с переменной t, получим

$$E=\oint_{-C} P\,dx+Q\,dy=\oint_{-C} m(x+y)\,dx-mx\,dy=$$

$$=\int_0^{-2\pi} m(a\cos t+a\sin t)\,d(a\cos t)-ma\cos t\,d(a\sin t)=$$

$$=-ma^2\int_0^{-2\pi}(1+\sin t\cos t)\,dt=-ma^2\left(t+\frac{\sin^2 t}{2}\right)\Big|_0^{-2\pi}=2\pi ma^2.$$

890. Найти длину дуги кривой $x=2-\frac{t^4}{4}$, $y=\frac{t^6}{6}$ между точками пересечения ее с осями координат.

891. Найти длину дуги AB кривой $e^{2y}(e^{2x}-1)=e^{2x}+1$; $x_A=1$, $x_B=2$.

892. Найти площадь, ограниченную кривой:

1) кардиоидой $x=2\cos t-\cos 2t$, $y=2\sin t-\sin 2t$;

2) астроидой $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

893*. Найти площадь: 1) ограниченную кривой $y^2=x^2-x^4$; 2) петли кривой $y^2=x^2+x^3$. (Перейти к параметрическим уравнениям, полагая $y=xt$.)

894. Найти массу дуги OA кривой:

1) $3y=2x\sqrt{x}$, если в каждой ее точке M линейная плотность пропорциональна длине дуги OM, $O(0;\,0)$, $A\left(4;\,\frac{16}{3}\right)$;

2) $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$, если линейная плотность в каждой ее точке обратно пропорциональна ординате точки, $x_0=0$, $x_A=a$.

895. Найти центр тяжести однородной дуги AB винтовой линии $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=mt$; $t_A=0$, $t_B=2\pi$.

896. Найти центр тяжести дуги NP астроиды $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, если в каждой ее точке линейная плотность пропорциональна абсциссе точки; $N(0, a)$, $P(a, 0)$.

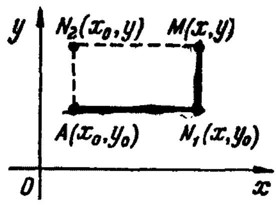
897. Найти работу силового поля при перемещении точки массы m вдоль периметра квадрата, образованного прямыми $x=\pm a$, $y=\pm a$, если в каждой точке (x, y) поля напряжение (сила, действующая на единицу массы) $\overline{p}=(x-y)\overline{i}+x\overline{j}$.

898*. Точка массы m перемещается в силовом поле по дуге AB кривой $f(x, y)=0$. Найти работу поля, если в каждой его точке (x, y) сила, действующая на единицу массы, направлена к началу координат и по модулю равна расстоянию точки от начала координат.

§ 10. Нахождение функции по ее полному дифференциалу

Если известен полный дифференциал функции двух переменных $du=P\,dx+Q\,dy$, где $P'_y=Q'_x$, то ее можно найти, интегрируя du по любой линии между произвольной фиксированной точкой $A(x_0, y_0)$ и переменной точкой $M(x, y)$:

$$u=\int\limits_{AM} P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy+C. \qquad (*)$$



Черт. 189

Обычно в качестве линии интегрирования AM берется ломаная AN_1M или AN_2M со звеньями, параллельными осям координат (черт. 189). При этом криволинейный интеграл $\int\limits_{AM}$ наиболее просто выражается через обыкновенные интегралы, и формула (*) преобразуется к виду

$$u=\int\limits_{AM} du+C=\begin{cases}\int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy+C & (1)\\ \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy+C. & (2)\end{cases}$$

Во многих случаях можно найти функцию u по ее полному дифференциалу $du=P\,dx+Q\,dy$ иначе.

Поскольку полный дифференциал равен сумме частных дифференциалов $du=d_xu+d_yu$, $d_xu=P\,dx$, $d_yu=Q\,dy$, то интегрируя каждый из них отдельно, найдем два выражения искомой