895. Найти центр тяжести однородной дуги AB винтовой линии $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=mt$; $t_A=0$, $t_B=2\pi$.

896. Найти центр тяжести дуги NP астроиды $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, если в каждой ее точке линейная плотность пропорциональна абсциссе точки; $N(0, a)$, $P(a, 0)$.

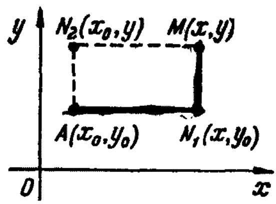
897. Найти работу силового поля при перемещении точки массы m вдоль периметра квадрата, образованного прямыми $x=\pm a$, $y=\pm a$, если в каждой точке (x, y) поля напряжение (сила, действующая на единицу массы) $\bar{p}=(x-y)\bar{i}+x\bar{j}$.

898*. Точка массы m перемещается в силовом поле по дуге AB кривой $f(x, y)=0$. Найти работу поля, если в каждой его точке (x, y) сила, действующая на единицу массы, направлена к началу координат и по модулю равна расстоянию точки от начала координат.

§ 10. Нахождение функции по ее полному дифференциалу

Если известен полный дифференциал функции двух переменных $du=P\,dx+Q\,dy$, где $P'_y=Q'_x$, то ее можно найти, интегрируя du по любой линии между произвольной фиксированной точкой $A(x_0, y_0)$ и переменной точкой $M(x, y)$:

$$u=\int_{AM} P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy+C. \qquad (*)$$



Черт. 189

Обычно в качестве линии интегрирования AM берется ломаная AN_1M или AN_2M со звеньями, параллельными осям координат (черт. 189). При этом криволинейный интеграл $\int_{AM}$ наиболее просто выражается через обыкновенные интегралы, и формула $(*)$ преобразуется к виду

$$u=\int_{AM} du+C=\begin{cases} \displaystyle\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy+C & (1)\\ \displaystyle\int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx+\int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy+C. & (2)\end{cases}$$

Во многих случаях можно найти функцию u по ее полному дифференциалу $du=P\,dx+Q\,dy$ иначе.

Поскольку полный дифференциал равен сумме частных дифференциалов $du=d_xu+d_yu$, $d_xu=P\,dx$, $d_yu=Q\,dy$, то интегрируя каждый из них отдельно, найдем два выражения искомой функции u:

а) $u=\int P\,dx+\varphi(y)$, считая y постоянной;

б) $u=\int Q\,dy+\psi(x)$, считая x постоянной,

где $\varphi(y)$ и $\psi(x)$ — неизвестные функции.

Беря все известные члены из первого выражения и дописав к ним недостающие члены, зависящие только от y, из второго выражения получим функцию u.

Решение такой задачи легко проверить: если функция u найдена верно, то ее полный дифференциал, найденный по формуле $du=u'_x dx+u'_y dy$, должен быть тождествен данному полному дифференциалу $P\,dx+Q\,dy$.

899. Проверить, что данное выражение является полным дифференциалом функции $u(x, y)$, и найти u:

1) $(2x-3y^2+1)\,dx+(2-6xy)\,dy$; 2) $(e^{xy}+5)(x\,dy+y\,dx)$;

3) $(1-\sin 2x)\,dy-(3+2y\cos 2x)\,dx$.

Решение. 1) Обозначим коэффициенты при дифференциалах $P=2x-3y^2+1$, $Q=2-6xy$ и найдем $P'_y=-6y$ и $Q'_x=-6y$. Так как здесь $P'_y=Q'_x$ и P, Q, P'_y, Q'_x непрерывны, то заданное выражение является полным дифференциалом некоторой функции u.

Найдем эту функцию по формуле (1), выбрав точку A в начале координат $O(0, 0)$

$$u=\int_0^x (2x+1)\,dx+\int_0^y (2-6xy)\,dy+C=x^2+x+2y-3xy^2+C.$$

2) Преобразуем заданное дифференциальное выражение к виду $P\,dx+Q\,dy$ и найдем P'_y и Q'_x:

$$y(e^{xy}+5)\,dx+x(e^{xy}+5)\,dy;\quad P'_y=5+e^{xy}(1+xy)=Q'_x.$$

Условие $P'_y=Q'_x$ выполнено. Заданное выражение есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$.

Найдем эту функцию по формуле (2):

$$u=\int_{x_0}^x y(e^{xy}+5)\,dx+\int_{y_0}^y x_0(e^{x_0y}+5)\,dy+C=e^{xy}+5xy\Big|_{x_0}^x+$$

$$+e^{x_0y}+5x_0y\Big|_{y_0}^y+C=e^{xy}+5xy-e^{x_0y_0}-5x_0y_0+C=e^{xy}+5xy+C_1,$$

где $C_1=C-e^{x_0y_0}-5x_0y_0$.

3) Вначале находим частные производные

$$P'_y = -(3+2y\cos 2x)'_y = -2\cos 2x,$$
$$Q'_x = (1-\sin 2x)'_x = -2\cos 2x$$

и убеждаемся, что они тождественно равны и что заданное выражение есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$. Затем найдем эту функцию вторым способом, интегрируя каждый частный дифференциал $P\,dx$ и $Q\,dy$ отдельно.

а) $u = -\int (3+2y\cos 2x)\,dx = -3x - y\sin 2x + \varphi(y)$, считая y постоянной;

б) $u = \int (1-\sin 2x)\,dy = y - y\sin 2x + \psi(x)$, считая x постоянной.

Объединяя эти два выражения — дописав к известным членам первого выражения недостающий член, зависящий только от y, из второго выражения получим одну из первообразных функций, а прибавив к ней произвольную постоянную C, получим общее выражение первообразной функции для заданного полного дифференциала $u = y - 3x - y\sin 2x + C$.

В задачах 900—905 проверить, что данное дифференциальное выражение есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$ и затем найти u:

900. $(3x^2y+1)\,dx + (x^3-1)\,dy$.
901. $\cos x\cos y\,dx - \sin y(\sin x + 4\cos y)\,dy$.
902. $[1+\cos(xy)](y\,dx + x\,dy)$.
903. $(y^2e^{xy}-3)\,dx + e^{xy}(1+xy)\,dy$.
904. $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$. **905.** $\dfrac{(x+2y)\,dx + y\,dy}{(x+y)^2}$.

§ 11. Интегралы по поверхности, их вычисление сведением к двойным интегралам

Если функция $f(M)$ непрерывна в каждой точке M гладкой* поверхности σ и если разбить эту поверхность произвольным способом на n частичных поверхностей с площадями Δs_1, Δs_2, $\ldots$, Δs_n, выбрать на каждой из них по одной произвольной точке M_1, M_2, $\ldots$, M_n, вычислить значения функции в этих точках и составить сумму

$$f(M_1)\,\Delta s_1 + f(M_2)\,\Delta s_2 + \ldots + f(M_n)\,\Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta s_i,$$

то она называется интегральной суммой функции $f(M)$ по площади поверхности σ.

Поскольку в описанном процессе составления интегральной суммы можно по-разному разбивать поверхность σ на n частич-

* Гладкая поверхность в каждой своей точке имеет определенную касательную плоскость, положение которой непрерывно меняется вместе с точкой касания.