3) Вначале находим частные производные

$$P'_y = -(3+2y\cos 2x)'_y = -2\cos 2x,$$
$$Q'_x = (1-\sin 2x)'_x = -2\cos 2x$$

и убеждаемся, что они тождественно равны и что заданное выражение есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$. Затем найдем эту функцию вторым способом, интегрируя каждый частный дифференциал $P\,dx$ и $Q\,dy$ отдельно.

а) $u = -\int (3+2y\cos 2x)\,dx = -3x - y\sin 2x + \varphi(y)$, считая y постоянной;

б) $u = \int (1-\sin 2x)\,dy = y - y\sin 2x + \psi(x)$, считая x постоянной.

Объединяя эти два выражения — дописав к известным членам первого выражения недостающий член, зависящий только от y, из второго выражения получим одну из первообразных функций, а прибавив к ней произвольную постоянную C, получим общее выражение первообразной функции для заданного полного дифференциала $u = y - 3x - y\sin 2x + C$.

В задачах 900—905 проверить, что данное дифференциальное выражение есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$ и затем найти u:

900. $(3x^2y+1)\,dx + (x^3-1)\,dy$.

901. $\cos x\cos y\,dx - \sin y(\sin x + 4\cos y)\,dy$.

902. $[1+\cos(xy)](y\,dx + x\,dy)$.

903. $(y^2e^{xy}-3)\,dx + e^{xy}(1+xy)\,dy$.

904. $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$. **905.** $\dfrac{(x+2y)\,dx + y\,dy}{(x+y)^2}$.

§ 11. Интегралы по поверхности, их вычисление сведением к двойным интегралам

Если функция $f(M)$ непрерывна в каждой точке M гладкой* поверхности σ и если разбить эту поверхность произвольным способом на n частичных поверхностей с площадями Δs_1, Δs_2, ..., Δs_n, выбрать на каждой из них по одной произвольной точке M_1, M_2, ..., M_n, вычислить значения функции в этих точках и составить сумму

$$f(M_1)\,\Delta s_1 + f(M_2)\,\Delta s_2 + \ldots + f(M_n)\,\Delta s_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta s_i,$$

то она называется интегральной суммой функции $f(M)$ по площади поверхности σ.

Поскольку в описанном процессе составления интегральной суммы можно по-разному разбивать поверхность σ на n частич-

* Гладкая поверхность в каждой своей точке имеет определенную касательную плоскость, положение которой непрерывно меняется вместе с точкой касания.

ных поверхностей и на каждой из них можно по-разному выбирать по одной точке M_i, то для всякой данной функции $f(M)$ и всякой данной поверхности σ можно составить бесчисленное множество различных интегральных сумм. При этом, если n будет неограниченно возрастать, а наибольший из диаметров частичных поверхностей будет стремиться к нулю, то все эти интегральные суммы будут иметь один общий предел, который называется поверхностным интегралом от функции $f(M)$ по площади поверхности σ и обозначается $\iint\limits_{\sigma} f(M)\,ds$.

Поверхностные интегралы по координатам x и y, x и z или y и z

$$\iint\limits_{\sigma} P(M)\,dx\,dy,\quad \iint\limits_{\sigma} Q(M)\,dx\,dz \quad \text{или} \quad \iint\limits_{\sigma} R(M)\,dy\,dz \qquad (*)$$

определяются аналогично, как пределы интегральных сумм функций $P(M)$, $Q(M)$ или $R(M)$, взятых по поверхности σ, с той лишь разницей, что при составлении этих сумм значения функции в точках M_i умножаются не на площади частичных поверхностей Δs_i, а на их проекции на координатные плоскости xOy, xOz или yOz.

Поверхностный интеграл по координатам общего вида

$$\iint\limits_{\sigma} P(M)\,dx\,dy + Q(M)\,dx\,dz + R(M)\,dy\,dz$$

представляет сумму поверхностных интегралов по координатам вида $(*)$.

Вычисление поверхностных интегралов обоих типов сводится к вычислению двойных интегралов: исходя из уравнения поверхности σ подынтегральное выражение поверхностного интеграла преобразуется к двум переменным, областью изменения которых будет проекция σ на соответствующую (этим переменным) координатную плоскость.

Если область интегрирования поверхностного интеграла — поверхность σ имеет уравнение $z=\varphi(x, y)$, то поверхностный интеграл первого типа (по площади поверхности) преобразуется в двойной интеграл (и затем вычисляется) по формуле

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)\,ds = \iint\limits_{\sigma_{xy}} f[x, y, \varphi(x, y)]\sqrt{1+(\varphi'_x)^2+(\varphi'_y)^2}\,dx\,dy, \qquad (1)$$

где σ_{xy} — проекция области σ на плоскость xOy,
а поверхностный интеграл второго типа (по координатам) — по формуле

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z)\,dx\,dy = \pm\iint\limits_{\sigma_{xy}} f[x, y, \varphi(x, y)]\,dx\,dy, \qquad (2)$$

где двойной знак соответствует двум различным сторонам поверхности σ: плюс соответствует интегрированию по верхней стороне поверхности σ (обращенной в сторону положительного направления оси Oz), а минус — интегрированию по нижней стороне поверхности σ (обращенной в сторону отрицательного направления оси Oz).

Если для всей поверхности σ нельзя z выразить однозначной функцией от x и y, то ее следует разбить на части, для которых это возможно, и затем вычислить данный интеграл как сумму интегралов по составляющим частям.

Аналогично вычисляются поверхностные интегралы первого и второго типов, когда поверхность σ имеет уравнение вида $y=\varphi_1(x, z)$ или $x=\varphi_2(y, z)$.

При этом для поверхностного интеграла второго типа, как и в правой части формулы (2), перед двойным интегралом выбирается знак плюс или минус, смотря по тому, берется ли поверхностный интеграл по стороне поверхности σ, которая обращена в сторону положительного или отрицательного направления соответствующей координатной оси (перпендикулярной к координатной плоскости расположения области интегрирования двойного интеграла).

Поверхностный интеграл по координатам x, y, взятый по куску цилиндрической поверхности с образующими, параллельными оси Oz, равен нулю. В аналогичных случаях равны нулю и поверхностные интегралы по координатам x, z или y, z.

Если σ замкнутая поверхность, то интеграл по внешней ее стороне обозначается $\oiint\limits_{+\sigma}$, а по внутренней стороне $\oiint\limits_{-\sigma}$.

Интеграл по замкнутой поверхности σ можно преобразовать в тройной интеграл по области G, ограниченной этой поверхностью, и, наоборот, по формуле Остроградского—Гаусса:

$$\oiint\limits_{+\sigma} P\,dy\,dz+Q\,dx\,dz+R\,dx\,dy=\iiint\limits_{G}(P'_x+Q'_y+R'_z)\,dx\,dy\,dz, \qquad (3)$$

где функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ и их частные производные первого порядка должны быть непрерывны в области G.

Интеграл по незамкнутой поверхности σ связан с криволинейным интегралом по контуру l, ограничивающему эту поверхность, по формуле Стокса:

$$\iint\limits_{\sigma}(R'_y-Q'_z)\,dy\,dz+(P'_z-R'_x)\,dx\,dz+(Q'_x-P'_y)\,dx\,dy=$$

$$=\oint\limits_{l} P\,dx+Q\,dy+R\,dz, \qquad (4)$$

где функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ и их частные производные первого порядка должны быть непрерывны в некоторой области G, содержащей σ.

Направление обхода контура l и сторона поверхности σ согласуются по следующему правилу: *с той стороны поверхности σ, по которой ведется интегрирование, обход контура l должен быть направлен против часовой стрелки* *.

Если по этой формуле криволинейный интеграл по замкнутому контуру l преобразуется в поверхностный интеграл, то σ может быть любая (кусочно-гладкая) поверхность, «натянутая» на l и содержащаяся в области G.

В случае, когда σ есть плоская область D на плоскости xOy ($z=0$), формула (4) упрощается:

$$\iint_D (Q'_x - P'_y)\,dx\,dy = \oint_{+l} P\,dx + Q\,dy. \tag{5}$$

Этот частный вид формулы Стокса принято называть формулой Грина.

906. Вычислить поверхностные интегралы первого типа (по площади поверхности):

1) $I = \iint_\sigma (6x + 4y + 3z)\,ds$, где σ — часть плоскости $x + 2y + 3z = 6$, расположенная в первом октанте.

2) $K = \iint_W (y + z + \sqrt{a^2 - x^2})\,ds$, где W — поверхность цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$, заключенная между плоскостями $z=0$ и $z=h$.

Решение. 1) Поверхность интегрирования σ есть треугольник ABC (черт. 190). Пользуясь ее уравнением и формулой (1), преобразуем данный поверхностный интеграл в двойной интеграл с переменными x и y:

$$z = \frac{1}{3}(6 - x - 2y),\ ds = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dx\,dy = \frac{\sqrt{14}}{3}\,dx\,dy,$$

$$I = \frac{\sqrt{14}}{3}\iint_{\sigma_{xy}} (5x + 2y + 6)\,dx\,dy,$$

где σ_{xy} — треугольник ABO, являющийся проекцией σ на плоскость xOy.

---

* Точнее: При обходе контура l по стороне интегрирования поверхности σ прилежащая к нему часть σ должна быть слева.

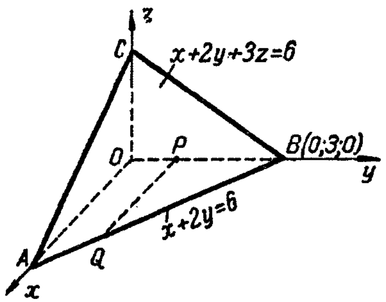
Полученный двойной интеграл вычисляем двукратным интегрированием:

$$I=\frac{\sqrt{14}}{3}\int\limits_{y_O=0}^{y_B=3}dy\int\limits_{x_P=0}^{x_Q=6-2y}(5x+2y+6)\,dx=$$

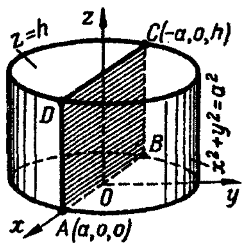
$$=\frac{\sqrt{14}}{3}\int\limits_0^3\left(\frac{5}{2}x^2+2xy+6x\Big|_{x=0}^{x=6-2y}\right)dy=2\sqrt{14}\int\limits_0^3(y^2-10y+21)\,dy=$$

$$=2\sqrt{14}\left(\frac{y^3}{3}-5y^2+21y\right)\Big|_0^3=54\sqrt{14}.$$

2) Здесь для всей поверхности W нельзя выразить одну из координат однозначной функцией от двух других координат. Части цилиндрической поверхности, расположенные по разные



Черт. 190



Черт. 191

стороны от вертикальных координатных плоскостей (черт. 191), имеют различные явные уравнения: часть W_1, расположенная слева от плоскости xOz, имеет уравнение $y=-\sqrt{a^2-x^2}$, а часть W_2, расположенная справа от этой плоскости, имеет уравнение $y=\sqrt{a^2-x^2}$. Поэтому вычисляем данный интеграл K по поверхности W как сумму интегралов K_1 и K_2 по составляющим ее частям W_1 и W_2.

Преобразуя поверхностные интегралы K_1 и K_2 в двойные интегралы с переменными x и z, получим:

$$ds=\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\,dx\,dz=\frac{a\,dx\,dz}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$K_1=a\iint\limits_{(W_1)_{xz}}\frac{z\,dx\,dz}{\sqrt{a^2-x^2}},\qquad K_2=a\iint\limits_{(W_2)_{xz}}\left(2+\frac{z}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx\,dz.$$

Следовательно,

$$K=K_1+K_2=2a\iint\limits_{ABCD}\left(1+\frac{z}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx\,dz,$$

так как прямоугольник $ABCD$ есть общая проекция поверхностей W_1 и W_2 на плоскость xOz.

Вычисляя полученный двойной интеграл, найдем:

$$K = 2a\int_0^h dz \int_{-a}^{a}\left(1+\frac{z}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx = 2a\int_0^h \left(x + z\arcsin\frac{x}{a}\Big|_{x=-a}^{x=a}\right)dz =$$

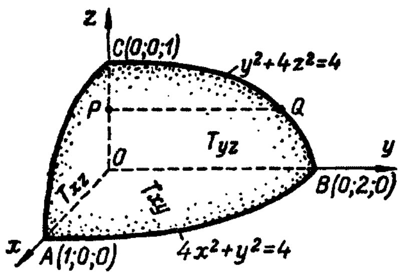
$$= 2a\int_0^h (2a+\pi z)\,dz = 2a\left(2az+\frac{\pi z^2}{2}\right)\Big|_0^h = ah(4a+\pi h).$$

907. Вычислить поверхностные интегралы второго типа (по координатам):

1) $I = \iint_\sigma \sqrt[4]{x^2+y^2}\,dx\,dy$, где σ — нижняя сторона круга $x^2+y^2 \leqslant a^2$.

2) $J = \iint_T 2\,dx\,dy + y\,dx\,dz - x^2z\,dy\,dz$, где T — внешняя сторона части эллипсоида $4x^2+y^2+4z^2=4$, расположенной в первом октанте.

3) $K = \oiint_{-W} y\,dx\,dz$, где W — поверхность тетраэдра, ограниченного плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.



Черт. 192

Решение. 1) Поверхность σ совпадает со своей проекцией σ_{xy} на плоскость xOy. Поэтому и согласно формуле (2), учитывая, что интегрирование распространяется на нижнюю сторону круга, получим:

$$I = -\iint_{x^2+y^2\leqslant a^2} \sqrt[4]{x^2+y^2}\,dx\,dy =$$

$$= -\iint_{\rho\leqslant a} \sqrt{\rho}\,\rho\,d\varphi\,d\rho = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \rho^{\frac{3}{2}}\,d\rho = \int_{2\pi}^{0} \frac{2}{5}\rho^{\frac{5}{2}}\Big|_0^a d\varphi = -\frac{4}{5}\pi\sqrt{a^5}.$$

Здесь выполнен переход от прямоугольных координат к полярным.

2) Расчленяем данный поверхностный интеграл по координатам общего вида на три слагаемых интеграла

$$J = 2\iint_T dx\,dy + \iint_T y\,dx\,dz - \iint_T x^2 z\,dy\,dz$$

и, пользуясь уравнением поверхности T и формулой (2), преобразуем каждый из них в двойной интеграл:

$J_1=\iint\limits_T dx\,dy=\iint\limits_{T_{xy}} dx\,dy$, где T_{xy} — проекция T на плоскость xOy — часть OAB эллипса $4x^2+y^2\leqslant 4$ (черт. 192);

$J_2=\iint\limits_T y\,dx\,dz=2\iint\limits_{T_{xz}} \sqrt{1-x^2-z^2}\,dx\,dz$, где T_{xz} — часть OAC круга $x^2+z^2\leqslant 1$;

$$J_3=\iint\limits_T x^2z\,dy\,dz=\iint\limits_{T_{yz}} z\left(1-\frac{y^2}{4}-z^2\right)dy\,dz,$$

где T_{yz} — часть OBC эллипса $y^2+4z^2\leqslant 4$.

Первый интеграл численно равен площади области T_{xy} — четверти площади эллипса с полуосями $a=1$, $b=2$, т. е. $J_1=\frac{\pi ab}{4}=\frac{\pi}{2}$ (см. задачу 604 (4), стр. 196).

Второй интеграл вычислим, переходя к полярным координатам:

$$J_2=2\iint\limits_{OAC}\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\,d\varphi\,d\rho=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\int\limits_0^1(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}d(1-\rho^2)=$$

$$=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{2(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]\Bigg|_0^1 d\varphi=\frac{\pi}{3};$$

$$J_3=\int\limits_0^1 z\,dz\int\limits_{y_P}^{y_Q}\left(1-\frac{y^2}{4}-z^2\right)dy=\int\limits_0^1 z\left(y-\frac{y^3}{12}-z^2y\Bigg|_{y=0}^{y=2\sqrt{1-z^2}}\right)dz=$$

$$=\frac{4}{3}\int\limits_0^1 z(1-z^2)^{\frac{3}{2}}\,dz=\frac{2}{3}\,\frac{2(1-z^2)^{\frac{5}{2}}}{5}\Bigg|_1^0=\frac{4}{15}.$$

Следовательно, $J=2J_1+J_2-J_3=\frac{4}{3}\pi-\frac{4}{15}$.

3) Замкнутая поверхность W состоит из четырех частей — треугольников ABC, BCO, ACO, ABO, расположенных в различных плоскостях (см. черт. 174). Соответственно этому вычисляем данный интеграл как сумму четырех интегралов.

Преобразуя поверхностный интеграл по внутренней (обращенной к началу координат) стороне треугольника ABC в двойной интеграл и вычисляя его, получим:

$$\iint\limits_{ABC} y\,dx\,dz = -\iint\limits_{ACO} (1-x-z)\,dx\,dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x+z-1)\,dz =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{(x+z-1)^2}{2} \Bigg|_{z=0}^{z=1-x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^0 (x-1)^2\,dx = \frac{(x-1)^3}{6}\Bigg|_1^0 = -\frac{1}{6};$$

$\iint\limits_{BCO} y\,dx\,dz = \iint\limits_{ABO} y\,dx\,dz = 0$, так как плоскости BCO и ABO перпендикулярны плоскости xOz (см. стр. 315);

$$\iint\limits_{ACO} y\,dx\,dz = \iint\limits_{ACO} 0\,dx\,dz = 0.$$

Следовательно, $K = -\frac{1}{6}$.

908. По формуле Остроградского—Гаусса вычислить поверхностный интеграл $I = \oiint\limits_{+\sigma} 4x^3\,dy\,dz + 4y^3\,dx\,dz - 6z^4\,dx\,dy$, где σ — полная поверхность цилиндра, черт. 191, данного в задаче 906 (2).

Решение. Путем сопоставления данного интеграла с левой частью формулы (3) определяем: $P = 4x^3$, $Q = 4y^3$, $R = -6z^4$. Затем находим производные: $P'_x = 12x^2$, $Q'_y = 12y^2$, $R'_z = -24z^3$, подставляем их в правую часть формулы (3) и таким образом вместо данного поверхностного интеграла по замкнутой поверхности σ получим тройной интеграл по области G, ограниченной этой поверхностью:

$$I = 12 \iiint\limits_G (x^2 + y^2 - 2z^3)\,dx\,dy\,dz.$$

Интегрируя вначале по z, а затем переходя к полярным координатам, найдем

$$I = 12 \iint\limits_{G_{xy}} dx\,dy \int\limits_0^h (x^2+y^2-2z^3)\,dz = 12 \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant a^2} \Big[(x^2+y^2)z -$$

$$- \frac{z^4}{2}\Big]\Bigg|_{z=0}^{z=h} dx\,dy = 12 \iint\limits_{\rho \leqslant a} \left(\rho^2 h - \frac{h^4}{2}\right)\rho\,d\varphi\,d\rho =$$

$$= 12h \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a \left(\rho^3 - \frac{h^3}{2}\rho\right) d\rho = 6\pi a^2 h\,(a^2 - h^3).$$

909. Пользуясь формулой Стокса, вычислить криволинейный интеграл $K = \oint\limits_l e^x\,dx + z(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dy + yz^3\,dz$, где l — замкнутая линия $OCBAO$ (черт. 193) пересечения поверхностей $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=1$.

Решение. Сопоставляя K с формулой (4), определяем: $P=e^x$, $Q=z(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}$, $R=yz^3$.

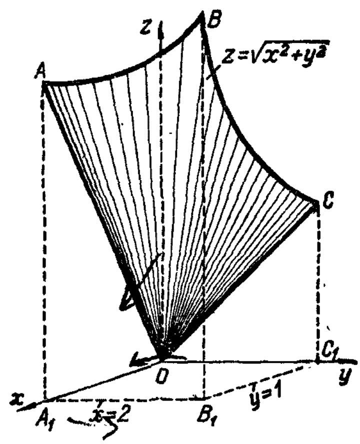
Находим производные:

$$P'_y=P'_z=0,\ Q'_x=3xz\sqrt{x^2+z^2},\ Q'_z=(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}},\ R'_x=0,$$
$$R'_y=z^3$$

и подставляя их в формулу Стокса, получим

$$K=3\iint_\sigma xz\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Здесь σ может быть любая (гладкая или кусочно-гладкая) поверхность, «натянутая» на данный контур l. Пользуясь этим, выберем в качестве σ часть данной конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, ограниченную контуром l.



Черт. 193

Тогда, интегрируя по нижней стороне указанной поверхности, на которой заданный обход контура l направлен против часовой стрелки, найдем:

$$K=-3\iint_{\sigma_{xy}} x(x^2+y^2)\,dx\,dy=$$
$$=-\int_0^1 dy\int_0^2 (x^3+xy^2)\,dx=-14$$

(σ_{xy} — прямоугольник $OA_1B_1C_1$).

Вычислить следующие поверхностные интегралы первого типа:

910. $\iint_\sigma ds$, где σ — часть плоскости $x+y+z=a$, расположенная в первом октанте.

911. $\iint_T x\,ds$, где T — полусфера $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

912. $\iint_W (x^2+y^2)\,ds$, где W — поверхность, отсекаемая от параболоида $x^2+y^2=2z$ плоскостью $z=1$.

913. $\iint_\sigma (x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)\,ds$, где σ — поверхность, отсекаемая от полости конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$ цилиндром $x^2+y^2=2x$.

Вычислить следующие поверхностные интегралы второго типа:

914. $\iint\limits_{\sigma}(y^2+z^2)\,dy\,dz$, где σ — внешняя сторона части параболоида $x=a^2-y^2-z^2$, отсеченной плоскостью yOz.

915. $\oiint\limits_{-\sigma} z^2\,dx\,dy$, где σ — эллипсоид $x^2+y^2+2z^2=2$.

916. $\oiint\limits_{-\sigma} z\,dx\,dy+y\,dx\,dz+x\,dy\,dz$, где σ — поверхность куба, ограниченного плоскостями $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$.

917. $\oiint\limits_{+W}(z+1)\,dx\,dy$, где W — сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$.

918. Пользуясь формулой Остроградского — Гаусса, решить задачи 915, 916, 917.

919. Применяя формулу Стокса, вычислить криволинейные интегралы:

1) $\oint\limits_{-L}(2x+y)\,dx-2y\,dy$, где L — периметр треугольника $A(0;\ -1)$, $B(0,\ 2)$; $C(2;\ 0)$. За поверхность σ принять данный треугольник;

2) $\oint\limits_{l} 8y\sqrt{(1-x^2-z^2)^3}\,dx+xy^3\,dy+\sin z\,dz$, где l — замкнутый контур $ACBA$ (черт. 192), данный в задаче 907 (2). В качестве поверхности σ взять часть данного эллипсоида.

§ 12. Вычисление величин посредством поверхностных интегралов

1) Площадь S поверхности σ

$$S=\iint\limits_{\sigma} ds. \tag{1}$$

2) Масса материальной поверхности σ

$$m=\iint\limits_{\sigma}\delta(M)\,ds, \tag{2}$$

где $\delta(M)$ — поверхностная плотность распределения массы в точке $M\ (x,\ y,\ z)$ поверхности σ.

3) Координаты центра тяжести C поверхности σ

$$x_C=\frac{m_{yz}}{m}=\frac{\iint\limits_{\sigma}x\delta\,ds}{\iint\limits_{\sigma}\delta\,ds};\quad y_C=\frac{m_{xz}}{m}=\frac{\iint\limits_{\sigma}y\delta\,ds}{\iint\limits_{\sigma}\delta\,ds};\quad z_C=\frac{m_{xy}}{m}=\frac{\iint\limits_{\sigma}z\delta\,ds}{\iint\limits_{\sigma}\delta\,ds}, \tag{3}$$

где m_{yz}, m_{xz}, m_{xy} — статические моменты поверхности σ относительно плоскостей координат.