Вычислить следующие поверхностные интегралы второго типа:

914. $\iint\limits_{\sigma} (y^2+z^2)\,dy\,dz$, где σ — внешняя сторона части параболоида $x=a^2-y^2-z^2$, отсеченной плоскостью yOz.

915. $\oiint\limits_{-\sigma} z^2\,dx\,dy$, где σ — эллипсоид $x^2+y^2+2z^2=2$.

916. $\oiint\limits_{-\sigma} z\,dx\,dy+y\,dx\,dz+x\,dy\,dz$, где σ — поверхность куба, ограниченного плоскостями $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$.

917. $\oiint\limits_{+W} (z+1)\,dx\,dy$, где W — сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$.

918. Пользуясь формулой Остроградского — Гаусса, решить задачи 915, 916, 917.

919. Применяя формулу Стокса, вычислить криволинейные интегралы:

1) $\oint\limits_{-L} (2x+y)\,dx-2y\,dy$, где L — периметр треугольника $A(0;\ -1)$, $B(0,\ 2)$; $C(2;\ 0)$. За поверхность σ принять данный треугольник;

2) $\oint\limits_{l} 8y\sqrt{(1-x^2-z^2)^3}\,dx+xy^3\,dy+\sin z\,dz$, где l — замкнутый контур $ACBA$ (черт. 192), данный в задаче 907 (2). В качестве поверхности σ взять часть данного эллипсоида.

§ 12. Вычисление величин посредством поверхностных интегралов

1) Площадь S поверхности σ

$$S=\iint\limits_{\sigma} ds. \tag{1}$$

2) Масса материальной поверхности σ

$$m=\iint\limits_{\sigma} \delta(M)\,ds, \tag{2}$$

где $\delta(M)$ — поверхностная плотность распределения массы в точке $M(x,\ y,\ z)$ поверхности σ.

3) Координаты центра тяжести C поверхности σ

$$x_C=\frac{m_{yz}}{m}=\frac{\iint\limits_{\sigma} x\delta\,ds}{\iint\limits_{\sigma} \delta\,ds};\quad y_C=\frac{m_{xz}}{m}=\frac{\iint\limits_{\sigma} y\delta\,ds}{\iint\limits_{\sigma} \delta\,ds};\quad z_C=\frac{m_{xy}}{m}=\frac{\iint\limits_{\sigma} z\delta\,ds}{\iint\limits_{\sigma} \delta\,ds}, \tag{3}$$

где m_{yz}, m_{xz}, m_{xy} — статические моменты поверхности σ относительно плоскостей координат.

Для однородной поверхности $\delta = \mathrm{const}$ выносится за знаки интегралов и сокращается.

Другие применения поверхностных интегралов указываются в следующей главе.

920. Найти площадь части поверхности:

1) конуса $z^2 = 2xy$, расположенной в первом октанте между плоскостями $x=2$, $y=4$;

2) сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, расположенной внутри цилиндра $x^2+y^2=Rx$;

3 цилиндра $x^2+y^2=Rx$, расположенной внутри сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Решение. 1) Применяем формулу (1). Пользуясь уравнением конуса, преобразуем поверхностный интеграл в двойной интеграл с переменными x и y:

$$S=\iint\limits_{\sigma} ds=\iint\limits_{\sigma_{xy}} \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint\limits_{\sigma_{xy}}\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)dx\,dy,$$

где σ_{xy} — проекция σ на плоскость xOy — прямоугольник $OABC$ (черт. 194).

Вычисляя двойной интеграл, получим

$$S=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^4\left(\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^2\left(2\sqrt{xy}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{y^3}{x}}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=4}dx=$$

$$=2\sqrt{2}\int\limits_0^2\left(\sqrt{x}+\frac{4}{3\sqrt{x}}\right)dx=2\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+\frac{8}{3}\sqrt{x}\right)\Bigg|_0^2=16.$$

2) Данная поверхность * симметрична относительно плоскостей xOy и xOz; в первом октанте помещается ее четвертая часть (σ) (черт. 195), для которой апликата $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Поэтому согласно формуле (1) искомая площадь

$$S=4\iint\limits_{\sigma} ds=4\iint\limits_{\sigma_1}\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy=4R\iint\limits_{\sigma_1}\frac{dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

где σ_1 — полукруг, ограниченный окружностью $x^2+y^2=Rx$ и осью Ox ($x^2+y^2\leqslant Rx$, $y\geqslant 0$).

---

* Верхнее и нижнее основания «тела Вивиани», вырезаемого цилиндром из шара. На черт. 195 изображена половина этого тела, расположенная над плоскостью xOy.

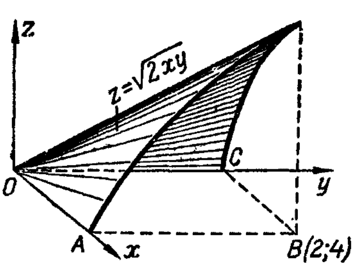
Переходя к полярным координатам и интегрируя, имеем:

$$0 \leqslant \rho \leqslant R\cos\varphi, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2};$$

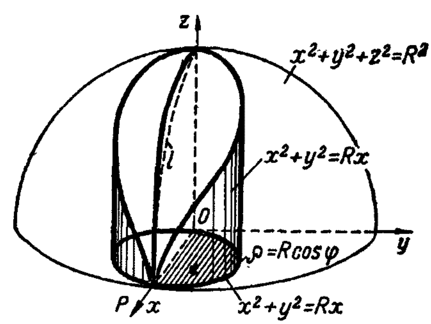
$$S = 4R\iint\limits_{\sigma_1} \frac{\rho\, d\varphi\, d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = -2R\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{R\cos\varphi} (R^2-\rho^2)^{-\frac{1}{2}}\, d(R^2-\rho^2) =$$

$$= 2R\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left[2\,(R^2-\rho^2)^{\frac{1}{2}}\right] \Big|_0^{R\cos\varphi} d\varphi = 4R^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\varphi)\, d\varphi = 2R^2(\pi-2)$$

($\rho = R\cos\varphi$ — полярное уравнение окружности $x^2+y^2=Rx$).



Черт. 194



Черт. 195

3) Данная поверхность * (черт. 195) также симметрична относительно плоскостей xOy и xOz; в первом октанте помещается ее четвертая часть (T), для которой ордината $y=\sqrt{Rx-x^2}$. Поэтому, преобразуя поверхностный интеграл формулы (1) в двойной интеграл с переменными x и z, получим

$$S = 4\iint\limits_{T_{xz}} \sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}\, dx\, dz = 2R\iint\limits_{T_{xz}} \frac{dx\, dz}{\sqrt{Rx-x^2}},$$

где T_{xz} — плоская область, ограниченная осями Ox и Oz и параболой l, уравнение которой $z^2 = R^2 - Rx$ получается путем исключения y из данных уравнений. (Эта парабола является проекцией на плоскость xOz линии пересечения цилиндра и сферы.)

Интегрируя, найдем

$$S = 2R\int\limits_0^R \frac{dx}{\sqrt{Rx-x^2}} \int\limits_0^{\sqrt{R^2-Rx}} dz = 2R\sqrt{R}\int\limits_0^R \frac{dx}{\sqrt{x}} = 4R\sqrt{Rx}\,\Big|_0^R = 4R^2.$$

---

* Боковая поверхность «тела Вивиани».

921. Найти массу полусферы, если в каждой ее точке поверхностная плотность численно равна расстоянию этой точки от радиуса, перпендикулярного основанию полусферы.

Решение. Поместим начало прямоугольной системы координат в центре основания полусферы и направим ось аппликат перпендикулярно этому основанию. Тогда уравнение полусферы будет $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, где R—радиус полусферы; поверхностная плотность в точке $M(x, y, z)$ полусферы будет $\delta(M)=\sqrt{x^2+y^2}$; $ds=\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,dx\,dy=\dfrac{R\,dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$.

Подставляя в формулу (2), получим:

$$m=\iint\limits_{\sigma}\delta\,ds=R\iint\limits_{\sigma_{xy}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},\quad \text{где } \sigma_{xy}\text{—круг } x^2+y^2\leqslant R^2.$$

Переходя к полярным координатам, найдем

$$m=R\iint\limits_{\rho\leqslant R}\frac{\rho^2\,d\varphi\,d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=R\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\frac{\rho^2\,d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=\frac{\pi^2R^3}{2}.$$

(Внутренний интеграл вычисляется посредством замены переменной по формуле $\rho=R\sin t$.)

922. Найти центр тяжести полусферы, данной в условии предыдущей задачи.

Решение. При том же расположении системы координат вследствие симметричного расположения данной поверхности и распределенной на ней массы относительно оси аппликат $x_C=y_C=0$.

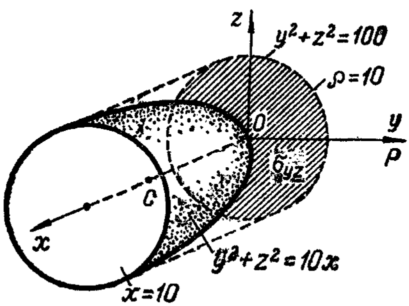
Для определения аппликаты центра тяжести вычислим статический момент

$$m_{xy}=\iint\limits_{\sigma}z\delta\,ds=R\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy=R\iint\limits_{\rho\leqslant R}\rho^2 d\varphi\,d\rho=\frac{2}{3}\pi R^4.$$

Масса полусферы найдена в решении предыдущей задачи.

Согласно формуле (3) $z_C=\dfrac{m_{xy}}{m}=\dfrac{4R}{3\pi}$.

923. Найти центр тяжести однородной поверхности параболоида $y^2+z^2=10x$, отсеченной плоскостью $x=10$.



Черт. 196

Решение. Данная однородная поверхность (σ) симметрична относительно оси абсцисс (черт. 196). Поэтому $y_C=z_C=0$.

Чтобы найти абсциссу центра тяжести, вычислим: 1) статический момент m_{yz} и 2) массу m данной поверхности:

$$1)\quad m_{yz}=\iint\limits_{\sigma} x\delta\,ds=\delta\iint\limits_{\sigma_{yz}} x\sqrt{1+(x_y')^2+(x_z')^2}\,dy\,dz=$$

$$=\frac{\delta}{50}\iint\limits_{y^2+z^2\leqslant 100}(y^2+z^2)\sqrt{25+y^2+z^2}\,dy\,dz=$$

$$=\frac{\delta}{50}\iint\limits_{\rho\leqslant 10}\rho^2\sqrt{25+\rho^2}\,\rho\,d\varphi\,d\rho=$$

$$=\frac{\delta}{50}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{10}\rho^2\sqrt{25+\rho^2}\,\rho\,d\rho=\frac{50}{3}\pi\delta\,(1+25\sqrt{5}).$$

Здесь после перехода к полярным координатам внутренний интеграл вычисляется с помощью подстановки $\sqrt{25+\rho^2}=t$.

$$2)\quad m=\iint\limits_{\sigma}\delta\,ds=\frac{\delta}{5}\iint\limits_{y^2+z^2\leqslant 100}\sqrt{25+y^2+z^2}\,dy\,dz=$$

$$=\frac{\delta}{5}\iint\limits_{\rho\leqslant 10}\sqrt{25+\rho^2}\,\rho\,d\varphi\,d\rho=\frac{\delta}{10}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{10}(25+\rho^2)^{\frac{1}{2}}\,d\,(25+\rho^2)=$$

$$=\frac{\delta}{10}\int\limits_0^{2\pi}\frac{2}{3}(25+\rho^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{10}d\varphi=\frac{50}{3}\pi\delta\,(5\sqrt{5}-1).$$

По формуле (3) $x_C=\dfrac{m_{yz}}{m}=\dfrac{25\sqrt{5}+1}{5\sqrt{5}-1}$.

Найти площадь части поверхности:

924. $2x+2y+z=8a$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=R^2$.

925. Цилиндра $x^2+y^2=R^2$, заключенной между плоскостями $y+z=0$ и $z=0$.

926. Цилиндра $y^2+z^2=R^2$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=R^2$.

927. Параболоида $x^2+y^2=6z$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=27$.

928. Сферы $x^2+y^2+z^2=3a^2$, заключенной внутри параболоида $x^2+y^2=2az$.

929. Найти массу цилиндрической поверхности $x^2+y^2=R^2$, заключенной между плоскостями $z=0$ и $z=H$, если в каждой ее точке поверхностная плотность обратно пропорциональна квадрату расстояния ее до начала координат.

930. Найти массу поверхности куба, ребро которого равно единице, если в каждой ее точке поверхностная плотность численно равна произведению расстояний этой точки до трех граней куба, проходящих через одну данную его вершину.

931. Найти центр тяжести полусферы $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, если в каждой ее точке поверхностная плотность пропорциональна квадрату расстояния этой точки от радиуса, перпендикулярного основанию полусферы.

932. Найти центр тяжести однородной поверхности конуса $a^2z^2=b^2(x^2+y^2)$, $0\leqslant z\leqslant b$.