ГЛАВА VIII

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

§ 1. Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент

Скалярным полем называется плоская или пространственная область, с каждой точкой M которой связано определенное значение некоторой скалярной физической величины $u = u(M)$. Задание поля скалярной величины u равносильно заданию скалярной (числовой) функции $u(M)$.

Функция $u(M)$, определяющая плоское скалярное поле, как функция точки $M(x, y)$, зависит от двух переменных $u = u(x, y)$, а функция, определяющая пространственное скалярное поле, как функция точки $M(x, y, z)$, зависит от трех переменных $u = u(x, y, z)$.

Линией уровня плоского скалярного поля называется совокупность точек плоскости, в которых функция этого поля имеет одинаковые значения. Линия уровня, во всех точках которой функция поля $u(x, y)$ имеет одно и то же значение C, определяется уравнением $u(x, y) = C$; различным постоянным значениям $C_1, C_2, C_3, \ldots$ функции поля соответствуют различные линии уровня: $u(x, y) = C_1$, $u(x, y) = C_2$, $u(x, y) = C_3, \ldots$

Поверхностью уровня пространственного скалярного поля называется совокупность точек пространства, в которых функция этого поля имеет одинаковые значения. Поверхность уровня, во всех точках которой функция поля $u(x, y, z)$ имеет одно и то же значение C, определяется уравнением $u(x, y, z) = C$.

Через каждую точку проходит только одна поверхность (линия) уровня; они заполняют всю рассматриваемую область и не пересекаются между собой.

Производной функции $u(M)$ по направлению $\overline{MP}$ называется предел отношения разности $u(M_1) - u(M)$ к величине направленного отрезка MM_1, когда точка M_1 стремится к точке M, оставаясь на прямой MP.

Производная функции u по направлению $\bar{l}$ обозначается $\frac{\partial u}{\partial l}$

или u'_l:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = u'_l = \lim_{M_1 \to M} \frac{u(M_1) - u(M)}{MM_1}$$

и вычисляется по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = \overline{N}\cdot\overline{l}^0, \qquad (a)$$

где $\overline{N}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$ — нормальный вектор к поверхности уровня, $\overline{l}^0\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ — единичный вектор направления $\overline{l}$.

Производная u'_l определяет величину скорости изменения функции $u(M)$ при перемещении точки M по направлению $\overline{l}$.

В каждой точке, где функция дифференцируема, она имеет производную по любому направлению.

Производные функции $u(x, y, z)$ по положительным направлениям осей координат Ox, Oy, Oz равны ее частным производным u'_x, u'_y и u'_z.

Производные по прямо противоположным направлениям отличаются только по знаку.

Производная функции $u(x, y)$ по направлению линии уровня (касательному к линии уровня) *и производная функции $u(x, y, z)$ по направлению любой линии, лежащей на поверхности уровня* (по любому направлению, касательному к поверхности уровня), *равны нулю.*

Градиентом функции (поля) $u(M)$ называется вектор

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\overline{k}. \qquad (б)$$

Направление вектора $\operatorname{grad} u$ в каждой точке M совпадает с направлением нормали к поверхности (линии) уровня, проходящей через эту точку.

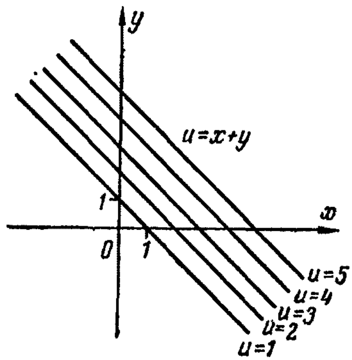
Из всех производных функции $u(M)$, взятых по различным направлениям, наибольшее значение всегда имеет производная по направлению градиента функции:

$$\frac{\partial u}{\partial l_{gr}} = |\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

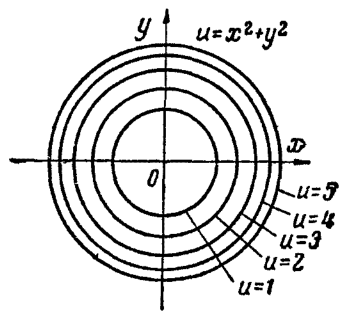
Градиент есть вектор скорости наибыстрейшего возрастания функции.

933. Построить линии уровня плоских скалярных полей: 1) $u = x + y$, 2) $u = x^2 + y^2$, 3) $u = \frac{2y}{x^2}$, соответствующие значениям $u = 1, 2, 3, 4, 5$.

Решение. 1) Полагая $u=1, 2, 3, 4, 5$, получим уравнения соответствующих линий уровня: $x+y=1$; $x+y=2$; $x+y=3$; $x+y=4$; $x+y=5$. Построив эти линии в прямоугольной системе координат xOy, получим прямые, параллельные биссектрисе 2-го и 4-го координатных углов (черт. 197).



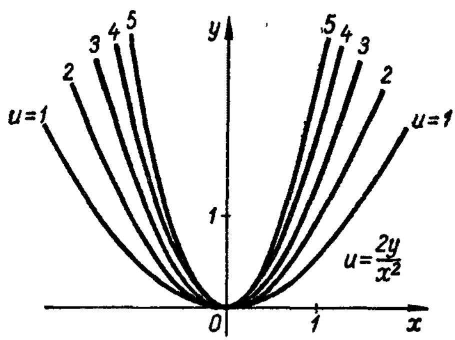
Черт. 197



Черт. 198

2) Написав уравнения линий уровня: $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=2$, $x^2+y^2=3$, $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=5$ и построив их в плоскости xOy, получим концентрические окружности с центром в начале координат (черт. 198).

3) Линии уровня $2y=x^2$, $y=x^2$, $2y=3x^2$, $y=2x^2$, $2y=5x^2$ представляют параболы, симметричные оси Oy с общей вершиной в начале координат (черт. 199).



Черт. 199

934. Найти производную функции $u=\sqrt{x^2+y^2}$ в точке $A\,(3;\,4)$:

1) по направлению биссектрисы первого координатного угла;

2) по направлению радиуса-вектора точки A;

3) по направлению вектора $\bar{q}\,\{4;\,-3\}$.

Решение. Находим частные производные функции u и вычисляем их значения в точке A:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A=\frac{3}{5};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A=\frac{4}{5}.$$

Подставляя в формулу (a), найдем производную функции u в точке A по любому направлению $\overline{l}\{\cos\alpha,\ \cos\beta\}$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_A=\frac{3}{5}\cos\alpha+\frac{4}{5}\cos\beta.$$

Находим далее косинусы углов α и β, образованных заданным направлением дифференцирования с осями координат, и производную функции u по заданному направлению:

1) Для биссектрисы первого координатного угла: $\alpha=\beta=45°$, $\cos\alpha=\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l_1}\right|_A=\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

2) Для вектора $\overline{OA}\{3;\ 4\}$: $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$; $\left.\frac{\partial u}{\partial l_2}\right|_A=\frac{3^2}{5^2}+\frac{4^2}{5^2}=1.$

3) Для вектора $\overline{q}\{4;\ -3\}$: $\cos\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\beta=-\frac{3}{5}$; $\left.\frac{\partial u}{\partial q}\right|_A=0.$

935. Найти производную функции $u=xy+yz+1$ по направлению вектора $\overline{l}\{12;\ -3;\ -4\}$ в любой точке и в точках $A(0;\ -2;\ -1)$ и $B(3;\ 3;\ 5)$.

Решение. Найдем частные производные функции u и направляющие косинусы вектора $\overline{l}$:

$$u'_x=y;\quad u'_y=x+z;\quad u'_z=y;$$
$$\cos\alpha=\frac{12}{13};\quad \cos\beta=-\frac{3}{13};\quad \cos\gamma=-\frac{4}{13}.$$

Подставляя в формулу (a), найдем производную функции u по направлению $\overline{l}$ в любой точке:

$$u'_l=\frac{12}{13}y-\frac{3}{13}(x+z)-\frac{4}{13}y=\frac{8y-3(x+z)}{13}.$$

Подставляя координаты точек A и B, получим $u'_l(A)=-1$; $u'_l(B)=0$.

936. С какой наибольшей скоростью может возрастать функция $u(M)=\frac{10}{x^2+y^2+z^2+1}$ при переходе точки $M(x,\ y,\ z)$ через точку $M_0(-1;\ 2;\ -2)$? В каком направлении должна двигаться точка M при переходе через точку $M_1(2;\ 0;\ 1)$, чтобы функция $u(M)$ убывала с наибольшей скоростью?

Решение. *Наибольшая по абсолютной величине скорость изменения* (возрастания или убывания) *функции $u(M)$ при переходе точки M через точку P численно равна модулю градиента функции в точке P*. При этом функция будет возрастать или убывать с наибольшей скоростью, смотря по тому, будет ли точка M при переходе через точку P двигаться по направлению градиента функции в точке P или по прямо противоположному направлению.

Руководствуясь этими положениями, находим частные производные функции u и по формуле (б)—ее градиент в любой точке:

$$\operatorname{grad} u = -\frac{20}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}).$$

Далее находим: 1) $\operatorname{grad} u(M_0)=\frac{1}{5}(\bar{i}-2\bar{j}+2\bar{k})$; его модуль, численно равный искомой наибольшей скорости возрастания функции $u(M)$ при переходе M через M_0, будет $|\operatorname{grad} u(M_0)| = \sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(-\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$.

2) $\operatorname{grad} u(M_1)=-\frac{10}{9}\bar{i}-\frac{5}{9}\bar{k}$; искомый вектор, имеющий прямо противоположное направление, будет $-\operatorname{grad} u(M_1)=\frac{10}{9}\bar{i}+\frac{5}{9}\bar{k}$. Чтобы функция $u(M)$ убывала с наибольшей скоростью, при переходе через точку M_1 точка M должна двигаться в направлении вектора $-\operatorname{grad} u(M_1)$.

937. Найти точки, в которых функция $z=e^x(x-y^3+3y)$ стационарна (т. е. точки, в которых производная по любому направлению равна нулю).

Решение. *Чтобы в некоторой точке P производная функции по любому направлению была равна нулю, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке все частные производные первого порядка функции одновременно обращались в нуль.* [Согласно формуле (а).]

Поэтому, найдя частные производные: $z'_x=e^x(x-y^3+3y+1)$, $z'_y=3e^x(1-y^2)$ и решая систему уравнений $z'_x=0$, $z'_y=0$, получим две точки: $(-3;\ 1)$ и $(1;\ -1)$, в которых функция стационарна.

938. Построить линии уровня скалярных полей:

1) $z=x^2+2y$, 2) $z=\frac{4x}{x^2+y^2}$,

соответствующие значениям $z=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$. Найти и построить градиент каждого поля в точках $A(1;\ -1)$ и $B(-2;\ -2)$.

939. Найти производную функции $z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ по направлению вектора $\bar{l}=3\bar{i}+4\bar{j}$ в любой точке и в точках $A(1;\ 3)$ и $B(2;\ 1)$. Построить линии уровня соответствующего скалярного поля, проходящие через точки A и B, и его градиент в этих точках.

940. Найти производную функции $u=xyz$ в точке $Q(1;\ -2;\ 2)$ по любому направлению и по направлению радиуса-вектора точки Q.

941. По какому направлению должна двигаться точка $M(x, y, z)$ при переходе через точку $M_0(-1;\ 1;\ -1)$, чтобы функция $F(M)=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$ возрастала с наибольшей скоростью?

942. С какой наибольшей скоростью может убывать функция $u(M)=\ln(x^2-y^2+z^2)$ при переходе точки $M(x, y, z)$ через точку $M_0(1;\ 1;\ 1)$?

943. Показать, что в точке $A(4;\ -12)$ производная функции $z=x^3+3x^2+6xy+y^2$ по любому направлению равна нулю (функция стационарна).

944. Найти точки, в которых функция $\varphi(x, y)=x^3+y^3+3xy$ стационарна.

§ 2. Векторное поле. Поток и дивергенция поля

Векторным полем называется плоская или пространственная область, с каждой точкой M которой связано определенное значение некоторой векторной физической величины $\bar{a}=\bar{a}(M)$.

Если векторное поле отнесено к прямоугольной системе координат $Oxyz$, то вектор $\bar{a}$ будет векторной функцией, а его проекции a_x, a_y, a_z на оси координат будут скалярными функциями от переменных x, y и z:

$$\bar{a}(M)=\bar{a}(x, y, z)=a_x(x, y, z)\bar{i}+a_y(x, y, z)\bar{j}+a_z(x, y, z)\bar{k}.$$

Поэтому задание поля векторной величины $\bar{a}$ равносильно заданию трех скалярных (числовых) функций a_x, a_y, a_z.

Векторной линией векторного поля называется кривая, направление которой в каждой точке M совпадает с направлением вектора, соответствующего этой точке поля.

Потоком векторного поля, образованного вектором $\bar{a}\{a_x, a_y, a_z\}$ через поверхность σ называется поверхностный интеграл (скаляр)

$$K=\iint\limits_{\sigma} a_x\,dy\,dz+a_y\,dx\,dz+a_z\,dx\,dy. \tag{1}$$

Если вектор $\bar{a}$ определяет поле скоростей текущей жидкости, то интеграл K выражает количество жидкости, протекающей через поверхность σ за единицу времени. При этом если σ — замкнутая поверхность, ограничивающая область G, и если интеграл (1) берется по внешней стороне σ, то величина K называется потоком вектора $\bar{a}$ изнутри поверхности σ; она дает разность между количествами жидкости, вытекшей из области G и втекшей в эту область за единицу времени (предполагается, что жидкость может свободно протекать через поверхность σ).

При $K>0$ из области G вытекает жидкости больше, чем в нее втекает, что указывает на наличие в этой области источ-