941. По какому направлению должна двигаться точка $M(x, y, z)$ при переходе через точку $M_0(-1;\ 1;\ -1)$, чтобы функция $F(M)=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$ возрастала с наибольшей скоростью?

942. С какой наибольшей скоростью может убывать функция $u(M)=\ln(x^2-y^2+z^2)$ при переходе точки $M(x,\ y,\ z)$ через точку $M_0(1;\ 1;\ 1)$?

943. Показать, что в точке $A(4;\ -12)$ производная функции $z=x^3+3x^2+6xy+y^2$ по любому направлению равна нулю (функция стационарна).

944. Найти точки, в которых функция $\varphi(x, y)=x^3+y^3+3xy$ стационарна.

§ 2. Векторное поле. Поток и дивергенция поля

Векторным полем называется плоская или пространственная область, с каждой точкой M которой связано определенное значение некоторой векторной физической величины $\bar{a}=\bar{a}(M)$.

Если векторное поле отнесено к прямоугольной системе координат $Oxyz$, то вектор $\bar{a}$ будет векторной функцией, а его проекции a_x, a_y, a_z на оси координат будут скалярными функциями от переменных x, y и z:

$$\bar{a}(M)=\bar{a}(x,\ y,\ z)=a_x(x,\ y,\ z)\bar{i}+a_y(x,\ y,\ z)\bar{j}+a_z(x,\ y,\ z)\bar{k}.$$

Поэтому задание поля векторной величины $\bar{a}$ равносильно заданию трех скалярных (числовых) функций a_x, a_y, a_z.

Векторной линией векторного поля называется кривая, направление которой в каждой точке M совпадает с направлением вектора, соответствующего этой точке поля.

Потоком векторного поля, образованного вектором $\bar{a}\{a_x,\ a_y,\ a_z\}$ через поверхность σ называется поверхностный интеграл (скаляр)

$$K=\iint\limits_{\sigma} a_x\,dy\,dz+a_y\,dx\,dz+a_z\,dx\,dy. \tag{1}$$

Если вектор $\bar{a}$ определяет поле скоростей текущей жидкости, то интеграл K выражает количество жидкости, протекающей через поверхность σ за единицу времени. При этом если σ — замкнутая поверхность, ограничивающая область G, и если интеграл (1) берется по внешней стороне σ, то величина K называется потоком вектора $\bar{a}$ изнутри поверхности σ; она дает разность между количествами жидкости, вытекшей из области G и втекшей в эту область за единицу времени (предполагается, что жидкость может свободно протекать через поверхность σ).

При $K>0$ из области G вытекает жидкости больше, чем в нее втекает, что указывает на наличие в этой области источников, питающих поток жидкости. При $K<0$ из области G вытекает жидкости меньше, чем втекает, что означает наличие в этой области стоков, где жидкость удаляется из потока. При $K=0$ из области G вытекает жидкости столько же, сколько в нее и втекает.

Дивергенцией векторного поля, определяемого вектором $\bar{a}$, называется скаляр

$$\operatorname{div}\bar{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}. \qquad (2)$$

Если $\operatorname{div}\bar{a}(M_0)>0$, то точка M_0 называется источником, а если $\operatorname{div}\bar{a}(M_0)<0$, то точка M_0 называется стоком, ибо в первом случае в любой бесконечно малой области, окружающей точку M_0, жидкость возникает, а во втором случае она исчезает.

Абсолютная величина $\operatorname{div}\bar{a}(M_0)$ характеризует мощность источника или стока.

Векторное поле, во всех точках которого дивергенция равна нулю, называется соленоидальным. Поток такого поля через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Согласно формуле Остроградского — Гаусса (гл. VII, § 11) поток и дивергенция векторного поля связаны между собой равенством

$$\underset{+\sigma}{\oiint} a_x\,dy\,dz+a_y\,dx\,dz+a_z\,dx\,dy=$$
$$=\iiint\limits_G\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz, \qquad (3)$$

которое имеет следующий смысл: *поток векторного поля через замкнутую поверхность* (σ) *равен тройному интегралу по области* (G), *ограниченной этой поверхностью, от дивергенции поля.*

945. Найти поток векторного поля $\bar{p}=x\bar{i}-y^2\bar{j}+(x^2+z^2-1)\bar{k}$ через поверхность $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (эллипсоид) изнутри этой поверхности.

Решение. Согласно формуле (1)

$$K=\underset{+\sigma}{\oiint} x\,dy\,dz-y^2\,dx\,dz+(x^2+z^2-1)\,dx\,dy.$$

Расчленяем этот поверхностный интеграл (II типа) на три слагаемых интеграла и, пользуясь данным уравнением эллипсоида (σ), сводим их вычисление к вычислению двойных интегралов.

1) $K_1=\underset{+\sigma}{\oiint} x\,dy\,dz=\iint\limits_{\sigma_1} x\,dy\,dz+\iint\limits_{\sigma_2} x\,dy\,dz,$

где σ_1 и σ_2 — части данного эллипсоида, расположенные по разные стороны от плоскости yOz (см. черт. 98), которые имеют различные явные уравнения:

$$x_{\sigma_1}=-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}} \quad \text{и} \quad x_{\sigma_2}=a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}.$$

Преобразуя эти поверхностные интегралы в двойные (по формуле, указанной в § 11 предыдущей главы), получим:

$$\iint_{\sigma_1} x\,dy\,dz=-\iint_{(\sigma_1)_{yz}} -a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dy\,dz,$$

так как поверхность σ_1 обращена в сторону отрицательного направления оси Ox;

$$\iint_{\sigma_2} x\,dy\,dz=\iint_{(\sigma_2)_{yz}} a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dy\,dz,$$

так как поверхность σ_2 обращена в сторону положительного направления оси Ox.

Проекции $(\sigma_1)_{yz}$ и $(\sigma_2)_{yz}$ поверхностей σ_1 и σ_2 на плоскость yOz представляют один и тот же эллипс $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$. Поэтому

$$K_1=2a\iint_{(\sigma_1)_{yz}}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dy\,dz=$$

$$=2a\int_{-b}^{b}dy\int_{-z_1}^{z_1}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dz,$$

где z_1—положительное значение z из уравнения эллипса $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Вычисляя двукратный интеграл, найдем $K_1=\frac{4}{3}\pi abc$. $\Big($Внутренний интеграл легко найти по формуле (Б), гл. IV, § 5, полагая $a=\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$, $t=\frac{z}{c}$.$\Big)$

$$2)\ K_2=\oint\!\!\!\oint_{+\sigma} y^2\,dx\,dz=\iint_{\sigma_3} y^2\,dx\,dz+\iint_{\sigma_4} y^2\,dx\,dz,$$

где σ_3 и σ_4—части поверхности σ, расположенные по разные стороны от плоскости xOz, уравнения которых

$$y_{\sigma_3}=-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}} \quad \text{и} \quad y_{\sigma_4}=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}.$$

Преобразуя поверхностные интегралы в двойные, получим

$$K_2 = -\iint\limits_{(\sigma_3)_{xz}} b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)dx\,dz + \\ + \iint\limits_{(\sigma_4)_{xz}} b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)dx\,dz = 0,$$

так как проекции $(\sigma_3)_{xz}$ и $(\sigma_4)_{xz}$ поверхностей σ_3 и σ_4 на плоскость xOz одинаковы.

3) По аналогичной причине вследствие четности подынтегральной функции поверхностного интеграла K_3 и симметричности поверхности σ относительно плоскости xOy

$$K_3 = \oiint\limits_{+\sigma}(x^2+z^2-1)\,dx\,dy = 0.$$

Следовательно, $K = K_1 - K_2 + K_3 = \frac{4}{3}\pi abc.$

По формуле Остроградского—Гаусса эта задача решается проще: находим дивергенцию поля

$$\operatorname{div}\bar{p} = (x)'_x + (-y^2)'_y + (x^2+z^2-1)'_z = 1-2y+2z$$

и подставляем в формулу (3):

$$K = \iiint\limits_G \operatorname{div}\bar{p}\,dv = \iiint\limits_G (1-2y+2z)\,dx\,dy\,dz,$$

где область G—эллипсоид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1.$

Полученный тройной интеграл расчленяем:

$$K = \iiint\limits_G dx\,dy\,dz - 2\iint\limits_{G_{xz}} dx\,dz\int\limits_{-y_1}^{y_1} y\,dy + 2\iint\limits_{G_{xy}} dx\,dy\int\limits_{-z_1}^{z_1} z\,dz,$$

где

$$y_1 = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}},\quad z_1 = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

Первый интеграл равен объему области G, т. е. объему эллипсоида $K_1 = \frac{4}{3}\pi abc$ (гл. V, § 4).

Второй и третий интегралы равны нулю, ибо равны нулю их указанные внутренние простые интегралы, как интегралы от нечетной функции (гл. V, § 2).

Следовательно, как и в первом решении, $K = \frac{4}{3}\pi abc.$

946. Найти дивергенцию векторного поля:

1) $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$; 2) $\bar{p} = \dfrac{\bar{i}+\bar{j}+\bar{k}}{\sqrt[3]{(x+y+z)^2}}$;

3) $\bar{q} = e^{xy}(y\bar{j} - x\bar{i} + xy\bar{k})$.

Решение. Применяем формулу (2):

1) $\operatorname{div} \bar{r}(M) = \dfrac{\partial r_x}{\partial x} + \dfrac{\partial r_y}{\partial y} + \dfrac{\partial r_z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$

2) $p_x = p_y = p_z = (x+y+z)^{-\frac{2}{3}}$;

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} = \frac{\partial p_y}{\partial y} = \frac{\partial p_z}{\partial z} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x+y+z)^5}};$$

$$\operatorname{div} \bar{p}(M) = -2(x+y+z)^{-\frac{5}{3}} = f(M).$$

3) $q_x = -xe^{xy}$; $q_y = ye^{xy}$; $q_z = xye^{xy}$;

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} = -e^{xy}(1+xy) = -\frac{\partial q_y}{\partial y}; \quad \frac{\partial q_z}{\partial z} = 0; \ \operatorname{div} \bar{q}(M) = 0.$$

Полученные результаты имеют следующий смысл:

1. Каждая точка поля радиус-вектора $\bar{r}$ является источником постоянной мощности.

2. Точка M поля вектора $\bar{p}$ в зависимости от ее координат может быть или источником, или стоком. Например, точка $M_1(0;\ 0;\ 1)$, в которой $\operatorname{div} \bar{p} = -2$, является стоком; точка $M_2(-1;\ 0;\ 0)$, в которой $\operatorname{div} \bar{p} = 2$, является источником.

3. В поле вектора $\bar{q}$ нет ни источников, ни стоков. Поток этого соленоидального поля через любую замкнутую поверхность равен нулю.

947. Найти поток радиус-вектора $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$: 1) через боковую поверхность цилиндра $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $-H \leqslant z \leqslant H$ в сторону ее внешней нормали; 2) через боковую поверхность конуса $x^2 + y^2 \leqslant 4z^2$, $0 \leqslant z \leqslant 1$ в сторону ее внутренней нормали; 3) через полную поверхность куба $-a \leqslant x \leqslant a$, $-a \leqslant y \leqslant a$, $-a \leqslant z \leqslant a$ изнутри этой поверхности.

948. Найти поток векторного поля: 1) $\bar{p} = xy\bar{i} + yz\bar{j} + xz\bar{k}$ через расположенную в первом октанте часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, в сторону ее внешней нормали; 2) $\bar{q} = x^3\bar{i} + y^3\bar{j} + z^3\bar{k}$ через полную поверхность конуса $x^2 + y^2 \leqslant z^2$, $0 \leqslant z \leqslant H$ изнутри этой поверхности.

949. Найти дивергенцию векторного поля:

1) $\bar{a} = xy^2\bar{i} + x^2y\bar{j} + z^3\bar{k}$ в точке $A(1;\ -1;\ 3)$;

2) градиента функции $u = xy^2z^3$.

950. Проверить, что векторное поле $\bar{p}=yz(4x\bar{i}-y\bar{j}-z\bar{k})$ является соленоидальным.

951. Решить задачи 947 (3) и 948 (2), пользуясь формулой Остроградского—Гаусса.

§ 3. Циркуляция и вихрь векторного поля

Линейным интегралом вектора $\bar{a}$ вдоль линии l называется криволинейный интеграл

$$C=\int_l a_x\,dx+a_y\,dy+a_z\,dz. \qquad (1)$$

В силовом поле он выражает работу сил поля при перемещении точки вдоль линии l (см. гл. VII, § 9).

В случае замкнутой кривой этот интеграл называется циркуляцией поля вектора $\bar{a}$ по контуру l. Циркуляция характеризует вращательную способность поля на контуре l.

Вихрем (или ротором) векторного поля, определяемого вектором $\bar{a}$, называется вектор

$$\operatorname{rot}\bar{a}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\bar{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\bar{k}. \qquad (2)$$

Если через точку M поля $\bar{a}$ провести плоскость P, определяемую единичным нормальным вектором $\bar{n}$, то скалярное произведение $\operatorname{rot}\bar{a}(M)\cdot\bar{n}$ характеризует вращательную способность этого поля в точке M. Она зависит как от координат точки M, так и от направления плоскости P и достигает наибольшей величины, равной $|\operatorname{rot}\bar{a}(M)|$, когда плоскость P перпендикулярна вектору $\operatorname{rot}\bar{a}(M)$.

Векторное поле, во всех точках которого вихревой вектор равен нулю, называется потенциальным (или безвихревым). В потенциальном поле линейный интеграл (работа) не зависит от формы линии, соединяющей какие-либо две его точки, а циркуляция всегда равна нулю.

Векторное поле, являющееся одновременно и соленоидальным и потенциальным, называется гармоническим.

Согласно формуле Стокса (гл. VII, § 11) циркуляция и вихревой вектор поля связаны между собой равенством

$$\oint_l a_x\,dx+a_y\,dy+a_z\,dz=$$

$$=\iint_\sigma (\operatorname{rot}\bar{a})_x\,dy\,dz+(\operatorname{rot}\bar{a})_y\,dx\,dz+(\operatorname{rot}\bar{a})_z\,dx\,dy, \qquad (3)$$