950. Проверить, что векторное поле $\overline{p} = yz(4x\overline{i} - y\overline{j} - z\overline{k})$ является соленоидальным.

951. Решить задачи 947 (3) и 948 (2), пользуясь формулой Остроградского—Гаусса.

§ 3. Циркуляция и вихрь векторного поля

Линейным интегралом вектора $\overline{a}$ вдоль линии l называется криволинейный интеграл

$$C = \int_l a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz. \tag{1}$$

В силовом поле он выражает работу сил поля при перемещении точки вдоль линии l (см. гл. VII, § 9).

В случае замкнутой кривой этот интеграл называется циркуляцией поля вектора $\overline{a}$ по контуру l. Циркуляция характеризует вращательную способность поля на контуре l.

Вихрем (или ротором) векторного поля, определяемого вектором $\overline{a}$, называется вектор

$$\operatorname{rot}\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\overline{k}. \tag{2}$$

Если через точку M поля $\overline{a}$ провести плоскость P, определяемую единичным нормальным вектором $\overline{n}$, то скалярное произведение $\operatorname{rot}\overline{a}(M)\cdot\overline{n}$ характеризует вращательную способность этого поля в точке M. Она зависит как от координат точки M, так и от направления плоскости P и достигает наибольшей величины, равной $|\operatorname{rot}\overline{a}(M)|$, когда плоскость P перпендикулярна вектору $\operatorname{rot}\overline{a}(M)$.

Векторное поле, во всех точках которого вихревой вектор равен нулю, называется потенциальным (или безвихревым). В потенциальном поле линейный интеграл (работа) не зависит от формы линии, соединяющей какие-либо две его точки, а циркуляция всегда равна нулю.

Векторное поле, являющееся одновременно и соленоидальным и потенциальным, называется гармоническим.

Согласно формуле Стокса (гл. VII, § 11) циркуляция и вихревой вектор поля связаны между собой равенством

$$\oint_l a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz =$$

$$= \iint_\sigma (\operatorname{rot}\overline{a})_x\,dy\,dz + (\operatorname{rot}\overline{a})_y\,dx\,dz + (\operatorname{rot}\overline{a})_z\,dx\,dy, \tag{3}$$

смысл которого заключается в следующем: *циркуляция вектора по замкнутому контуру* (l) *равна потоку вихря вектора через поверхность* (σ), *ограниченную этим контуром.*

952. Вычислить циркуляцию поля вектора:

1) $\overline{r}=x\overline{j}$ вдоль окружности $x=a\cos t$, $y=a\sin t$;

2) $\overline{p}=(x-2)\overline{i}+(x+y)\overline{j}-2z\overline{k}$ вдоль периметра треугольника с вершинами $A(1;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 1;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ 1)$;

3) $\overline{q}\,\{xz,\ -yz^2,\ xy\}$ вдоль замкнутой линии (L) $z=x^2-y^2+2a^2$, $x^2+y^2=a^2$ (см. черт. 142, стр. 258) и вихревой вектор этого поля в точке $A(0,\ -a,\ a^2)$.

Решение. Применяя формулу (1), получим:

$$1)\ C=\oint\limits_L x\,dy=a^2\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=\frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1+\cos 2t)\,dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi}=\pi a^2.^*$$

$$2)\ C=\oint\limits_{ABCA}(x-2)\,dx+(x+y)\,dy-2z\,dz.$$

Периметр $ABCA$ треугольника состоит из трех отрезков, которые лежат на прямых, имеющих различные уравнения. Поэтому криволинейный интеграл по контуру $ABCA$ вычисляем как сумму интегралов по отрезкам AB, BC и CA.

Составив уравнения прямой AB: $x+y=1$, $z=0$ и исходя из этих уравнений, преобразуем криволинейный интеграл по отрезку AB в обыкновенный интеграл с переменной x:

$$\int\limits_{AB}=\int\limits_1^0(x-3)\,dx=\frac{(x-3)^2}{2}\Big|_1^0=\frac{5}{2}.$$

Для отрезка BC: $y+z=1$, $x=0$; $\displaystyle\int\limits_{BC}=\int\limits_1^0(2-y)\,dy=-\frac{3}{2}$.

Для отрезка CA: $x+z=1$, $y=0$; $\displaystyle\int\limits_{CA}=-\int\limits_0^1 x\,dx=-\frac{1}{2}$.

Следовательно, $\displaystyle C=\oint\limits_{ABCA}=\int\limits_{AB}+\int\limits_{BC}+\int\limits_{CA}=\frac{1}{2}$.

$$3)\ C=\oint\limits_L xz\,dx-yz^2\,dy+xy\,dz.$$

Для вычисления этого интеграла преобразуем данные уравнения кривой L в параметрические: полагая $x=a\cos t$, получим $y=a\sin t$, $z=a^2(2+\cos 2t)$.

---

* Если выбрать другое направление обхода данного контура, то результат будет иметь противоположный знак.

Пользуясь этими уравнениями, преобразуем криволинейный интеграл C в обыкновенный интеграл с переменной t, затем вычисляем его:

$$C=-\frac{a^4}{2}\int_0^{2\pi}(2+\cos 2t)\sin 2t\,dt-\frac{a^6}{2}\int_0^{2\pi}(2+\cos 2t)^2\sin 2t\,dt-$$

$$-a^4\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt=\frac{a^4(2+\cos 2t)^2}{8}+\frac{a^6(2+\cos 2t)^3}{12}-$$

$$-\frac{a^4}{2}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}=-\pi a^4.$$

Вихревой вектор данного поля в любой его точке $M(x, y, z)$ находим по формуле (2):

$$\operatorname{rot}\bar{q}(M)=(x+2yz)\bar{i}+(x-y)\bar{j}.$$

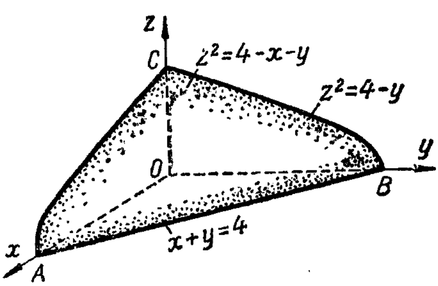
В данной точке $A(0, -a, a^2)$, $\operatorname{rot}\bar{q}=a\bar{j}-2a^3\bar{i}$.

953. Пользуясь формулой Стокса, вычислить циркуляцию векторного поля $\bar{a}=x\bar{i}+xz\bar{j}+z\bar{k}$ по контуру $ACBA$ (черт. 200), образованному пересечением поверхности $z^2=4-x-y$ с плоскостями координат.

Решение. По формуле (2) найдем вихревой вектор данного поля: $\operatorname{rot}\bar{a}=z\bar{k}-x\bar{i}$. Подставляя его проекции в формулу (3), получим:

$$C=\iint_\sigma z\,dx\,dy-x\,dy\,dz=$$

$$=\iint_\sigma z\,dx\,dy-\iint_\sigma x\,dy\,dz.$$



Черт. 200

В качестве поверхности σ, ограниченной данным контуром, возьмем расположенную в первом октанте часть данной поверхности. Пользуясь ее уравнением, преобразуем поверхностные интегралы в двойные, учитывая при этом, что согласно формуле Стокса σ есть внутренняя сторона (обращенная к началу координат) указанной поверхности, на которой заданный обход контура $ACBA$ направлен против часовой стрелки:

$$C_1=\iint_\sigma z\,dx\,dy=-\iint_{\sigma_{xy}}\sqrt{4-x-y}\,dx\,dy=$$

$$=\int_4^0 dx\int_0^{4-x}(4-x-y)^{\frac{1}{2}}dy=\frac{2}{3}\int_0^4(4-x-y)^{\frac{3}{2}}\Big|_{y=0}^{y=4-x}dx=$$

$$=\frac{2}{3}\int_4^0(4-x)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{4}{15}(4-x)^{\frac{5}{2}}\Big|_0^4=-\frac{128}{15}$$

(σ_{xy} есть треугольник OAB);

$$C_2=\iint\limits_{\sigma} x\,dy\,dz=-\iint\limits_{\sigma_{yz}}(4-y-z^2)\,dy\,dz=$$

$$=\int\limits_4^0 dy\int\limits_0^{\sqrt{4-y}}(4-y-z^2)\,dz=\int\limits_4^0\left[(4-y)\,z-\frac{z^3}{3}\right]\Bigg|_{z=0}^{z=\sqrt{4-y}}dy=$$

$$=\frac{2}{3}\int\limits_4^0(4-y)^{\frac{3}{2}}\,dy=\frac{4}{15}\,(4-y)^{\frac{5}{2}}\Bigg|_0^4=-\frac{128}{15}$$

(σ_{yz} есть криволинейный треугольник OBC).

Следовательно, искомая циркуляция $C=C_1-C_2=0$.

В потенциальном поле циркуляция по любому замкнутому контуру равна нулю. Но поле вектора $\bar{a}$ не потенциальное; его циркуляция по данному контуру равна нулю, а, например, по контуру окружности $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=1$ она равна не нулю, а $\pm\pi$.

954. Вычислить циркуляцию векторного поля:

1) $\bar{p}=x^2y^3\bar{i}+\bar{j}+z\bar{k}$ вдоль окружности $x^2+y^2=a^2$, $z=0$.

2) $\bar{q}=(x-2z)\bar{i}+(x+3y+z)\bar{j}+(5x+y)\bar{k}$ вдоль периметра треугольника ACB, данного в условии задачи 952 (2).

955. Найти вихревой вектор в любой точке векторного поля:

1) $\bar{p}=x\bar{i}-z^2\bar{j}+y^2\bar{k}$; 2) $\bar{q}=yz\bar{i}+xz\bar{j}+xy\bar{k}$.

956. Проверить, что векторное поле градиента функции $u=\sqrt{x}\,\sqrt[3]{y}\,\sqrt[4]{z}$ является потенциальным.

957. Проверить, что векторное поле вектора $\bar{a}=\dfrac{x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$ является гармоническим.

958. Решить задачи 954 (1, 2), пользуясь формулой Стокса.