ГЛАВА IX

РЯДЫ

Решение многих задач сводится к вычислению значений функций и интегралов или к решению дифференциальных уравнений, содержащих производные или дифференциалы неизвестных функций (гл. X).

Однако точное выполнение указанных математических операций во многих случаях оказывается весьма затруднительным или невозможным. В этих случаях можно получить приближенное решение многих задач с любой желаемой точностью при помощи рядов.

Ряды представляют простой и весьма совершенный инструмент математического анализа для приближенного вычисления функций, интегралов и решений дифференциальных уравнений.

§ 1. Числовые ряды сходящиеся и расходящиеся. Необходимый признак сходимости ряда. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Числовым рядом называется выражение

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \qquad (1)$$

где числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, называемые членами ряда, образуют известную числовую последовательность.

Числовой ряд (1) *называется сходящимся, если сумма n первых его членов $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$ при $n\to+\infty$ имеет предел.*

Этот предел называется суммой сходящегося ряда.

Если же $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ *не существует, то ряд называется расходящимся.*

Ряд может сходиться лишь при условии, когда общий член ряда a_n, при неограниченном увеличении его номера n, стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$. (Это необходимый, но недостаточный признак сходимости для всякого ряда.)

Если же $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, *то ряд расходится.* (Это достаточный признак расходимости для всякого ряда.)

Для числовых рядов с положительными членами ($a_n>0$), при исследовании их сходимости, употребительны следующие достаточные признаки сходимости:

Интегральный признак Коши. *Ряд с положительными убывающими членами $a_n=f(n)$ сходится или расходится, смотря по тому, сходится или расходится несобственный интеграл* $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$, где $f(x)$ — непрерывная убывающая функция *.

Этим признаком можно пользоваться, когда выражение общего члена $a_n=f(n)$ имеет смысл не только для целых положительных значений n, но и для всех n, больших некоторого положительного числа m.

Признак Даламбера. *Если* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$, *то при* $\rho<1$ *ряд сходится, а при* $\rho>1$ *расходится. При* $\rho=1$ *вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.*

Признак сравнения. *Если ряд с положительными членами*

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots \qquad (a)$$

сравнить с другим рядом с положительными членами

$$b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n+\ldots \qquad (b)$$

сходимость или расходимость которого известна, и если начиная с некоторого номера n:

1) $a_n \leqslant b_n$ *и ряд (b) сходится, то и ряд (a) также сходится;*

2) $a_n \geqslant b_n$ *и ряд (b) расходится, то и ряд (a) также расходится.*

При использовании этого признака исследуемый ряд часто сравнивается или с бесконечной геометрической прогрессией

$$1+q+q^2+q^3+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty} q^n, \quad q>0, \qquad (*)$$

которая при $q<1$ сходится, а при $q\geqslant 1$ расходится, или с расходящимся гармоническим рядом

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}. \qquad (**)$$

---

* Нижним пределом интеграла может быть любое положительное число из области определения $f(x)$.

959. Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости для ряда:

$$1)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n-1}{3n+2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{3}{8}+\ldots;\quad 2)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n}{n^2+1}=$$
$$=1+\frac{4}{5}+\frac{6}{10}+\ldots$$

Решение. Ищем предел общего члена a_n данного ряда при неограниченном увеличении его номера n:

$$1)\ \lim_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{3n+2}=\lim\frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{2}{3};\quad 2)\ \lim_{n\to+\infty}\frac{2n}{n^2+1}=\lim\frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=0.$$

Необходимый признак сходимости $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$ для первого ряда не выполняется. Поэтому этот ряд расходится. Для второго ряда необходимый признак выполняется, вследствие чего он может быть или сходящимся или расходящимся, что можно установить лишь после дополнительного исследования (см. следующую задачу).

960. Исследовать по интегральному признаку сходимость ряда:

$$1)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n}{n^2+1};\quad 2)\ \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln^3 n};\quad 3)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4n+1}};\quad 4)\ \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{n}{n^4-9}.$$

Решение. Заменяем в заданном выражении общего члена ряда $a_n=f(n)$ номер n непрерывной переменной x и убеждаемся, что полученная функция $f(x)$ является непрерывной и убывающей во всем бесконечном интервале изменения x. Затем находим несобственный интеграл от $f(x)$ с бесконечным верхним пределом

$$1)\ \int_1^{+\infty}\frac{2x}{x^2+1}dx=\lim_{\beta\to+\infty}\int_1^{\beta}\frac{2x}{x^2+1}dx=\lim\ln(x^2+1)\Big|_1^{\beta}=$$
$$=\ln(+\infty)-\ln 2=+\infty.$$

Здесь несобственный интеграл расходится. Следовательно, согласно интегральному признаку и данный ряд также расходится.

$$2)\ \int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^3 x}dx=\lim_{\beta\to+\infty}\int_2^{\beta}(\ln x)^{-3}\,d(\ln x)=\lim\left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\right)\Big|_2^{\beta}=$$
$$=\lim\left(\frac{1}{2\ln^2 2}-\frac{1}{2\ln^2\beta}\right)=\frac{1}{2\ln^2 2}.$$

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{4x+1}}\, dx = \frac{1}{4} \lim_{\beta \to +\infty} \int\limits_0^{\beta} (4x+1)^{-\frac{1}{2}} d(4x+1) =$

$$= \frac{1}{4} \lim 2\sqrt{4x+1}\,\Big|_0^{\beta} = \frac{1}{2} \lim (\sqrt{4\beta+1} - 1) = +\infty.$$

4) $\int\limits_3^{+\infty} \frac{x}{x^4-9}\, dx = \frac{1}{2} \lim_{\beta \to +\infty} \int\limits_3^{\beta} \frac{d(x^2)}{(x^2)^2-9} = \frac{1}{12} \lim \ln \frac{x^2-3}{x^2+3}\Big|_3^{\beta} =$

$$= \frac{1}{12} \lim \left(\ln \frac{\beta^2-3}{\beta^2+3} - \ln \frac{6}{12} \right) = \frac{1}{12} \left(\lim \ln \frac{1-\frac{3}{\beta^2}}{1+\frac{3}{\beta^2}} - \ln \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{12} \ln 2.$$

Несобственные интегралы 2) и 4) сходятся, а интеграл 3) расходится. Поэтому согласно интегральному признаку и ряды 2) и 4) сходятся, а ряд 3) расходится.

961. Исследовать по признаку Даламбера сходимость ряда

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5}{2^n}$; 2) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{5^n}$; 4) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{7^{3n}}{(2n-5)!}$.

Решение. Зная n-й член ряда, находим следующий за ним $(n+1)$-й член, заменяя в выражении n-го члена n через $n+1$. Затем ищем предел отношения последующего члена a_{n+1} к предыдущему a_n при неограниченном возрастании n:

1) $a_n = \frac{n^5}{2^n}$; $a_{n+1} = \frac{(n+1)^5}{2^{n+1}}$;

$$\rho = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^5 = \frac{1}{2} \lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^5 = \frac{1}{2}.$$

Здесь $\rho < 1$. Поэтому согласно признаку Даламбера данный ряд сходится.

2) $a_n = \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$; $a_{n+1} = \frac{3^{2n+3}}{2^{3n+2}}$;

$$\rho = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{3^{2n+3}\, 2^{3n-1}}{2^{3n+2}\, 3^{2n+1}} = \frac{9}{8} > 1.$$

3) $a_n = \frac{n!}{5^n}$; $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{5^{n+1}}$;

$$\rho = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(n+1)!\, 5^n}{5^{n+1}\, n!} = \lim \frac{n+1}{5} = +\infty.$$

4) $a_n = \frac{7^{3n}}{(2n-5)!}$; $a_{n+1} = \frac{7^{3n+3}}{(2n-3)!}$;

$$\rho = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{7^{3n+3}\,(2n-5)!}{(2n-3)!\, 7^{3n}} = \lim \frac{7^3}{(2n-4)(2n-3)} = 0 < 1.$$

Согласно признаку Даламбера ряды 2) и 3) расходятся, а ряд 4) сходится.

962. Исследовать по признаку сравнения сходимость ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$;

3) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \ldots$; 4) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$.

Решение. 1) Сравним данный ряд с гармоническим рядом (**). Каждый член $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ данного ряда, начиная со второго, больше соответствующего члена $b_n = \frac{1}{n}$ гармонического ряда: $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{n}$, и так как гармонический ряд расходится, то, согласно признаку сравнения, данный ряд также расходится.

2) Каждый член $a_n = \frac{1}{n^n}$ данного ряда, начиная с третьего, меньше соответствующего члена b_n бесконечной геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$, которая представляет сходящийся ряд, ибо ее знаменатель $q = \frac{1}{2} < 1$. Поэтому, согласно признаку сравнения, исследуемый ряд также сходится.

3) Каждый член a_n данного ряда больше соответствующего члена b_n расходящегося гармонического ряда (**): $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$. Поэтому, согласно признаку сравнения, данный ряд расходится.

4) Каждый член $a_n = \frac{1}{(n+1)3^n}$ данного ряда, начиная со второго, меньше соответствующего члена $b_n = \frac{1}{3^n}$ бесконечной геометрической прогрессии, знаменатель которой $q = \frac{1}{3} < 1$. Эта бесконечно убывающая геометрическая прогрессия есть ряд сходящийся. Поэтому согласно признаку сравнения данный ряд сходится.

В задачах 963—966 написать пять первых членов ряда и проверить, выполняется ли для него необходимый признак сходимости.

963. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-3}{n(n+1)}$. **964.** $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$.

965. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n}$. **966.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2n}{3^n}$.

Исследовать по интегральному признаку сходимость ряда:

967. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

968. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}}$.

969. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$.

970. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$.

Исследовать по признаку Даламбера сходимость ряда:

971. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{2^n}$.

972. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{2^n(2n+1)}$.

973. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{(2n)!}$.

974. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n3^n}}$.

Исследовать по признаку сравнения сходимость ряда:

975. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$.

976. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n5^n}$.

977. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n+1}$.

978*. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt[3]{n^2}}$.

Исследовать сходимость ряда:

979. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)^3}}$.

980. $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\ldots$

981. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)^2}$.

982. $1+\frac{3}{2!}+\frac{3^2}{3!}+\frac{3^3}{4!}+\ldots$

983. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

984. $\frac{\ln 2}{4}+\frac{\ln 3}{9}+\frac{\ln 4}{16}+\frac{\ln 5}{25}+\ldots$

985. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{10^n 2n!}{(2n)!}$.

986*. $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+\ldots$

§ 2. Абсолютная и неабсолютная сходимость знакопеременного ряда. Признак сходимости знакочередующегося ряда

Знакопеременный ряд (с членами разных знаков)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \qquad (1)$$