Исследовать по интегральному признаку сходимость ряда:

967. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

968. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}}$.

969. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$.

970. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$.

Исследовать по признаку Даламбера сходимость ряда:

971. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{2^n}$.

972. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{2^n(2n+1)}$.

973. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{(2n)!}$.

974. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n3^n}}$.

Исследовать по признаку сравнения сходимость ряда:

975. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$.

976. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n5^n}$.

977. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n+1}$.

978*. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt[3]{n^2}}$.

Исследовать сходимость ряда:

979. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)^3}}$.

980. $1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\ldots$

981. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)^2}$.

982. $1+\frac{3}{2!}+\frac{3^2}{3!}+\frac{3^3}{4!}+\ldots$

983. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

984. $\frac{\ln 2}{4}+\frac{\ln 3}{9}+\frac{\ln 4}{16}+\frac{\ln 5}{25}+\ldots$

985. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{10^n 2n!}{(2n)!}$.

986*. $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+\ldots$

§ 2. Абсолютная и неабсолютная сходимость знакопеременного ряда. Признак сходимости знакочередующегося ряда

Знакопеременный ряд (с членами разных знаков)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \qquad (1)$$

называется **абсолютно** сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных значений его членов

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots \tag{2}$$

Знакопеременный сходящийся ряд (1) называется **неабсолютно** сходящимся, если ряд (2) расходится.

Всякий абсолютно сходящийся ряд есть ряд сходящийся.

Знакочередующийся ряд (знаки членов которого строго чередуются) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots,\ a_n > 0$ *сходится, если его члены убывают по абсолютному значению, стремясь к нулю, т. е. если* $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$ *и* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. (Признак **Лейбница**.)

При практическом использовании рядов (сходящихся) обычно ограничиваются несколькими их первыми членами. Допускаемая при этом ошибка (остаток ряда) наиболее просто оценивается для знакочередующихся рядов:

Ошибка при замене суммы сходящегося знакочередующегося ряда суммой нескольких его первых членов меньше абсолютного значения первого из отброшенных членов.*

987. Исследовать сходимость знакопеременного ряда. (Определить, является ли он абсолютно сходящимся, неабсолютно сходящимся или расходящимся.)

$$1)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1};\quad 2)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos n\alpha}{2^n};\quad 3)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)};\quad 4)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{n\pi}{3}.$$

Решение. 1) Члены данного знакочередующегося ряда убывают по абсолютному значению, стремясь к нулю:

$$1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \frac{1}{7} > \ldots \quad \text{и} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n-1} = 0.$$

Поэтому, согласно признаку Лейбница, данный ряд сходится. Чтобы установить, сходится ли он абсолютно или неабсолютно, исследуем ряд с положительными членами $\sum \frac{1}{2n-1}$, составленный из абсолютных значений членов данного ряда.

Применяя интегральный признак

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x-1}\,dx = \frac{1}{2}\lim_{\beta\to+\infty}\int_1^{\beta} \frac{d(2x-1)}{2x-1} = \frac{1}{2}\lim \ln(2x-1)\Big|_1^{\beta} =$$
$$= \frac{1}{2}\lim \ln(2\beta-1) = +\infty,$$

заключаем, что ряд с положительными членами расходится.

* С убывающими по абсолютному значению членами.

Следовательно, данный ряд 1) сходится неабсолютно.

2) Заменим члены данного знакопеременного ряда, где α — любое число, их абсолютными значениями и исследуем полученный ряд $\sum \frac{|\cos n\alpha|}{2^n}$ с положительными членами. Сравним его с геометрической бесконечно убывающей прогрессией $\sum \frac{1}{2^n}$, которая есть ряд сходящийся. Каждый член полученного ряда не превосходит соответствующего члена геометрической прогрессии: $\frac{|\cos n\alpha|}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$. Поэтому согласно признаку сравнения ряд с положительными членами также сходится, а заданный знакопеременный ряд 2) сходится абсолютно.

3) Члены данного знакочередующегося ряда убывают по абсолютному значению, стремясь к нулю: $\frac{1}{2} > \frac{1}{6} > \frac{1}{12} > \ldots$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0$. Поэтому согласно признаку Лейбница он сходится. Ряд $\sum \frac{1}{n(n+1)}$, составленный из абсолютных значений членов данного ряда, также сходится согласно интегральному признаку

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)} = \lim_{\beta \to +\infty} \int\limits_1^{\beta} \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \lim \ln \frac{x}{x+1}\Big|_1^{\beta} = \ln 2.$$

Следовательно, данный ряд абсолютно сходящийся.

4) Для данного знакопеременного ряда не выполняется необходимое условие сходимости: $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim \sin \frac{n\pi}{2}$ — не существует [см. решение задачи 38 (3)]. Вследствие этого он расходится.

988. Проверить, что знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}$ сходится и вычислить приближенное значение его суммы с точностью до 0,01.

Решение. Проверяем сходимость ряда по признаку Лейбница: убеждаемся, что его члены убывают по абсолютному значению и что $\lim\limits_{n \to +\infty} |a_n| = \lim \frac{1}{n^3+1} = 0$.

Далее вычисляем несколько последовательных первых членов данного ряда, пока не получим такой член, абсолютное значение которого меньше 0,01:

$$a_1 = -\frac{1}{2}; \quad a_2 = \frac{1}{9}; \quad a_3 = -\frac{1}{28}; \quad a_4 = \frac{1}{65}; \quad a_5 = -\frac{1}{126}.$$

Согласно указанному выше свойству знакочередующихся сходящихся рядов для вычисления суммы данного ряда с точностью до 0,01 достаточно взять сумму четырех его первых членов:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1} \approx -\frac{1}{2}+\frac{1}{9}-\frac{1}{28}+\frac{1}{65} \approx -0{,}41.$$

В задачах 989—992 написать шесть первых членов ряда и исследовать его сходимость:

989. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n}}$. **990.** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$.

991. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cos\frac{\pi}{5n}$. **992.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \alpha n}{n!}$.

Исследовать сходимость ряда:

993. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{2\ln 4}+\frac{1}{3\ln 6}-\frac{1}{4\ln 8}+\ldots$ **994*.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{tg}\frac{1}{n}$.

995. $\cos 1+\frac{\cos 2}{4}+\frac{\cos 3}{9}+\frac{\cos 4}{16}+\ldots$ **996*.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\,a^{2n}}$.

Проверить, что данный знакочередующийся ряд сходится и вычислить приближенное значение его суммы с точностью до 0,01:

997. $1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\ldots$ **998.** $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)(n+2)}$.

§ 3. Функциональные ряды

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots$, члены которого являются функциями от переменной x, называется функциональным.

При различных значениях x из функционального ряда получаются различные числовые ряды, которые могут быть сходящимися или расходящимися.

Совокупность значений x, при которых функциональный ряд сходится, называется его областью сходимости.

Из всех функциональных рядов простейшими и наиболее употребительными являются степенные ряды вида

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots \qquad (1)$$

или более общего вида

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots \qquad (2)$$