ностью до 0,01 достаточно взять сумму четырех его первых членов:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1} \approx -\frac{1}{2}+\frac{1}{9}-\frac{1}{28}+\frac{1}{65} \approx -0{,}41.$$

В задачах 989—992 написать шесть первых членов ряда и исследовать его сходимость:

989. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[3]{n}}$. **990.** $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$.

991. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cos\frac{\pi}{5n}$. **992.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \alpha n}{n!}$.

Исследовать сходимость ряда:

993. $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{2\ln 4}+\frac{1}{3\ln 6}-\frac{1}{4\ln 8}+\ldots$ **994*.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{tg}\frac{1}{n}$.

995. $\cos 1+\frac{\cos 2}{4}+\frac{\cos 3}{9}+\frac{\cos 4}{16}+\ldots$ **996*.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\,a^{2n}}$.

Проверить, что данный знакочередующийся ряд сходится и вычислить приближенное значение его суммы с точностью до 0,01:

997. $1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\ldots$ **998.** $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)(n+2)}$.

§ 3. Функциональные ряды

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x) = u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots$, члены которого являются функциями от переменной x, называется функциональным.

При различных значениях x из функционального ряда получаются различные числовые ряды, которые могут быть сходящимися или расходящимися.

Совокупность значений x, при которых функциональный ряд сходится, называется его областью сходимости.

Из всех функциональных рядов простейшими и наиболее употребительными являются степенные ряды вида

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots \qquad (1)$$

или более общего вида

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots \qquad (2)$$

Областью сходимости всякого степенного ряда является один интервал числовой оси, симметричный относительно точки $x=0$ (для ряда 1) или $x=x_0$ (для ряда 2), который может быть закрытым, открытым или полуоткрытым.

Для определения области сходимости функциональных рядов обычно вначале используется признак Даламбера, а затем те значения x, для которых этот признак не решает вопроса о сходимости ряда ($\rho=1$), *исследуются особо, посредством других признаков сходимости рядов.*

999. Определить интервал сходимости степенного ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n n!}{(2n)!}x^{2n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+8)^{3n}}{n^2}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}10^{2n}(2x-3)^{2n-1}$.

Решение. 1) По известному члену ряда u_n, заменяя в нем n через $n+1$, находим следующий за ним член u_{n+1}:

$$u_n=\frac{(-x)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}};\quad u_{n+1}=\frac{(-x)^{n+1}}{3^n\sqrt{n+1}}.$$

Далее, используя признак Даламбера, ищем предел

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\left|\frac{x^{n+1}3^{n-1}\sqrt{n}}{3^n\cdot\sqrt{n+1}\,x^n}\right|=\frac{|x|}{3}\lim\sqrt{\frac{n}{n+1}}=\frac{|x|}{3}$$

и определяем, при каких значениях x этот предел будет меньше единицы, т. е. решаем неравенство $\frac{|x|}{3}<1$; $|x|<3$; $-3<x<3$.

Согласно признаку Даламбера, при любом значении x из найденного интервала данный ряд сходится (абсолютно), а при $|x|>3$ расходится.

Граничные точки $x=\pm 3$ этого интервала, для которых $\rho=1$ и признак Даламбера не решает вопроса о сходимости ряда, исследуем особо.

При $x=-3$ получим числовой ряд с положительными членами $\sum\frac{3}{\sqrt{n}}$, который расходится, что следует из сравнения его с расходящимся гармоническим рядом $\sum\frac{1}{n}$. (Каждый член исследуемого ряда больше соответствующего члена гармонического ряда.)

При $x=3$ получим числовой знакочередующийся ряд $\sum(-1)^n\frac{3}{\sqrt{n}}$, который сходится согласно признаку Лейбница. (Члены этого ряда убывают по абсолютному значению, стремясь к нулю.)

Следовательно, интервалом сходимости данного степенного ряда является полуоткрытый интервал $-3 < x \leqslant 3$.

2) Здесь $u_n = \frac{2^n n!}{(2n)!} x^{2n}$; $u_{n+1} = \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(2n+2)!} x^{2n+2}$;

$$\rho = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim \frac{2(n+1)x^2}{(2n+1)(2n+2)} =$$

$$= 2x^2 \lim \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{2}{n}\right)} = 0 < 1,$$

т. е. для данного ряда $\rho < 1$ при любом значении x.

Следовательно, согласно признаку Даламбера этот ряд сходится при любом значении x; его интервал сходимости есть вся числовая ось $-\infty < x < +\infty$.

3) Здесь $u_n = \frac{(x+8)^{3n}}{n^2}$; $u_{n+1} = \frac{(x+8)^{3n+3}}{(n+1)^2}$;

$$\rho = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim \left| \frac{n^2 (x+8)^3}{(n+1)^2} \right| = |x+8|^3 \lim \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = |x+8|^3;$$

$$|x+8|^3 < 1;\ |x+8| < 1;\ -1 < x+8 < 1;\ -9 < x < -7.$$

Границы найденного интервала исследуем особо.

При $x = -9$ получим числовой знакочередующийся ряд с общим членом $a_n = \frac{(-1)^{3n}}{n^2} = \frac{(-1)^n}{n^2}$, который сходится согласно признаку Лейбница.

При $x = -7$ получим ряд с положительными членами $\sum \frac{1}{n^2}$. Исследуя его по интегральному признаку

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\beta \to +\infty} \int_1^{\beta} x^{-2}\,dx = \lim \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^{\beta} = \lim \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) = 1,$$

выясняем, что он сходится.

Следовательно, интервалом сходимости ряда является отрезок $-9 \leqslant x \leqslant -7$.

4) Для данного ряда $u_n = 10^{2n}(2x-3)^{2n-1}$; $u_{n+1} = 10^{2n+2}(2x-3)^{2n+1}$;

$$\rho = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 10^2 (2x-3)^2.$$

$$10^2(2x-3)^2 < 1;\ |2x-3| < 0{,}1;\ -0{,}1 < 2x-3 < 0{,}1;$$

$$1{,}45 < x < 1{,}55.$$

Границы найденного интервала исследуем особо: подставляя в данный ряд $x = 1{,}45$, затем $x = 1{,}55$, получим числовые ряды $-10-10-10-\ldots-10-\ldots$ и $10+10+10+\ldots+10+\ldots$, которые расходятся, так как для них не выполняется необходимое условие сходимости ряда $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.

Следовательно, интервал сходимости данного ряда есть

$$1{,}45 < x < 1{,}55.$$

1000. Определить область сходимости функционального ряда:

$$1)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(x+2)^n}; \qquad 2)\ \sum_{n=1}^{+\infty} n\sqrt[3]{\sin^n x}.$$

Решение: 1) Используем признак Даламбера:

$$u_n = \frac{1}{n(x+2)^n}; \quad u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(x+2)^{n+1}};$$

$$\rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim \frac{n}{(n+1)|x+2|} = \frac{1}{|x+2|}.$$

$$\frac{1}{|x+2|} < 1;\ |x+2| > 1;\ x+2 < -1,\ x+2 > 1;$$

$$-\infty < x < -3, \quad -1 < x < +\infty.$$

Границы двух найденных интервалов исследуем особо.

При $x = -3$ получим знакочередующийся числовой ряд с общим членом $\frac{1}{n(-1)^n}$, который сходится согласно признаку Лейбница.

При $x = -1$ получим гармонический расходящийся ряд.

Следовательно, область сходимости данного ряда состоит из двух бесконечных интервалов $(-\infty, -3]$ и $(-1, +\infty)$.

2) $u_n = n\sqrt[3]{\sin^n x}$; $u_{n+1} = (n+1)\sqrt[3]{\sin^{n+1} x}$;

$$\rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim \frac{n+1}{n}\left|\sqrt[3]{\sin x}\right| = \left|\sqrt[3]{\sin x}\right|.$$

Этот предел ρ будет меньше единицы, а исследуемый ряд будет сходящимся, согласно признаку Даламбера, для всех значений x, кроме $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, при которых $\rho = 1$.

При $x = x_k$ и при четном k получим ряд $1+2+3+\ldots+n+ +\ldots$, а при нечетном k — ряд $-1+2-3+\ldots+(-1)^n n+\ldots$, которые оба расходятся вследствие невыполнения необходимого условия сходимости.

Следовательно, область сходимости данного ряда есть вся числовая ось, исключая точки x_k.

Определить интервал сходимости степенного ряда:

1001. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots$

1002. $\sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n x^{2n}$.

1003. $1 + 2!\,x + 3!\,x^2 + 4!\,x^3 + \ldots$

1004. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-4)^{2n-1}}{2n-1}$.

1005. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1}$. **1006.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.

Определить область сходимости функционального ряда:

1007. $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots$ **1008.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lg^n x}{n}$.

1009. $\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2^2}+\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3^2}+\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4^2}+\ldots$ **1010*.** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$.

§ 4. Ряды Тейлора

Рядом Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки a называется степенной ряд относительно двучлена $x-a$ вида

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \qquad (T)$$

Этот ряд можно получить из многочлена Тейлора, указанного в гл. III, § 1, при неограниченном увеличении числа его членов. Формально ряд Тейлора можно написать для всякой функции, которая в окрестности точки a имеет производные любого порядка. Однако этот ряд будет сходиться в породившей его функции $f(x)$ только при тех значениях x, при которых остаточный член R_n формулы Тейлора (гл. III, § 1) для этой функции при неограниченном возрастании n стремится к нулю.

При $a=0$ ряд Тейлора есть степенной ряд относительно независимой переменной x:

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots, \qquad (M)$$

который принято называть рядом Маклорена.

Для разложения данной функции в ряд Тейлора нужно:

А) написать ряд Тейлора для данной функции, т. е. вычислить значения этой функции и ее производных при $x=a$ и подставить их в общее выражение ряда Тейлора (T) для произвольной функции;

Б) исследовать остаточный член R_n формулы Тейлора для данной функции и определить совокупность значений x, при которых полученный ряд сходится к данной функции (т. е. при которых $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n=0$).

Для многих функций, употребляемых в практических применениях математического анализа, интервал сходимости ряда Тейлора полностью совпадает с совокупностью тех значений x, при которых соответствующий остаточный член $R_n \to 0$, когда $n \to +\infty$, т. е. для многих функций каждая точка x сходимости ряда Тейлора является и точкой сходимости этого ряда к породившей его