1005. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^5}{(n+1)!}(x+5)^{2n+1}$. **1006.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$.

Определить область сходимости функционального ряда:

1007. $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots$ **1008.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\lg^n x}{n}$.

1009. $\operatorname{tg} x+\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2^2}+\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3^2}+\frac{\operatorname{tg}^4 x}{4^2}+\ldots$ **1010*.** $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}$.

§ 4. Ряды Тейлора

Рядом Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки a называется степенной ряд относительно двучлена $x-a$ вида

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \quad \text{(T)}$$

Этот ряд можно получить из многочлена Тейлора, указанного в гл. III, § 1, при неограниченном увеличении числа его членов. Формально ряд Тейлора можно написать для всякой функции, которая в окрестности точки a имеет производные любого порядка. Однако этот ряд будет сходиться в породившей его функции $f(x)$ только при тех значениях x, при которых остаточный член R_n формулы Тейлора (гл. III, § 1) для этой функции при неограниченном возрастании n стремится к нулю.

При $a=0$ ряд Тейлора есть степенной ряд относительно независимой переменной x:

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots, \quad \text{(M)}$$

который принято называть *рядом Маклорена*.

Для разложения данной функции в ряд Тейлора нужно:

А) написать ряд Тейлора для данной функции, т. е. вычислить значения этой функции и ее производных при $x=a$ и подставить их в общее выражение ряда Тейлора (Т) для произвольной функции;

Б) исследовать остаточный член R_n формулы Тейлора для данной функции и определить совокупность значений x, при которых полученный ряд сходится к данной функции (т. е. при которых $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n=0$).

Для многих функций, употребляемых в практических применениях математического анализа, интервал сходимости ряда Тейлора полностью совпадает с совокупностью тех значений x, при которых соответствующий остаточный член $R_n \to 0$, когда $n \to +\infty$, т. е. для многих функций каждая точка x сходимости ряда Тейлора является и точкой сходимости этого ряда к породившей его функции. Поэтому при разложении многих функций в ряд Тейлора можно вместо исследования соответствующего остаточного члена R_n, что во многих случаях весьма затруднительно, исследовать сходимость самого ряда Тейлора, как обычного степенного ряда.

1011. Разложить в ряд Маклорена функции e^x, $\sin x$, $\cos x$.

Решение. А) Значения данных функций и их производных любого порядка при $x=0$ были вычислены ранее в решении задачи 297 (гл. III, § 1). Подставляя эти значения в общее выражение ряда Маклорена (М) для произвольной функции, получим ряды Маклорена для данных функций:

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

Б) Каждый из этих рядов сходится к породившей его функции при всех значениях x, поскольку в решении задачи 297 было доказано, что для каждой из данных функций остаточный член R_n формулы Маклорена при неограниченном возрастании n стремится к нулю при любом значении x.

1012. Разложить в ряд Маклорена функции: 1) $(1+x)^m$, 2) $\ln(1+x)$.

Решение. 1) А. Исходя из решения задачи 298 и согласно определению ряда Маклорена для произвольной функции, получим

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\ldots$$

$$\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots \qquad \text{(Б)}$$

При целом положительном показателе m этот биномиальный ряд будет содержать конечное число $m+1$ членов, ибо коэффициенты всех последующих членов будут равны нулю. В этом случае он обращается в элементарную формулу бинома Ньютона.

Б. Исследуем сходимость биномиального ряда, когда m не есть целое положительное число, по признаку Даламбера:

$$u_n=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n; \quad u_{n+1}=\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1};$$

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\left|\frac{(m-n)x}{n+1}\right|=|x|\lim\left|\frac{\frac{m}{n}-1}{1+\frac{1}{n}}\right|=|x|;$$

$$\rho<1 \text{ при } -1<x<1.$$

Следовательно, согласно признаку Даламбера биномиальный ряд (Б) сходится в интервале $-1<x<1$ и, как доказывается в учебниках, он сходится именно к биному $(1+x)^m$.

2) А. Используя решение задачи 298, получим следующий ряд Маклорена для данной логарифмической функции:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

Б. Исследуем сходимость полученного ряда по признаку Даламбера: $|u_n|=\frac{|x^n|}{n}$; $|u_{n+1}|=\frac{|x^{n+1}|}{n+1}$;

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\frac{n}{n+1}|x|=|x|;$$

$$\rho<1 \quad \text{при} \quad -1<x<1.$$

При x, равном левой границе найденного интервала, т. е. при $x=-1$, получается числовой ряд $-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\ldots$, который расходится, так как все его члены отличаются от соответствующих членов расходящегося гармонического ряда только знаками.

При $x=1$ получается знакочередующийся ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-$ $-\frac{1}{4}+\ldots$, который сходится согласно признаку Лейбница.

Следовательно, полученный ряд Маклорена для данной логарифмической функции сходится в полуоткрытом интервале $(-1; 1]$. Можно доказать, что он сходится в этом интервале именно к данной функции $\ln(1+x)$.

1013. Разложить в ряд Тейлора функции:

1) $\frac{1}{x}$ при $a=-2$; 2) $\cos x$ при $a=\frac{\pi}{4}$.

Решение. 1) А. Вычисляем значения данной функции и ее производных при $x=a=-2$:

$$
\begin{array}{ll}
f(x)=x^{-1} & f(-2)=-\frac{1}{2} \\
f'(x)=-1\cdot x^{-2} & f'(-2)=-\frac{1!}{2^2} \\
f''(x)=1\cdot 2x^{-3} & f''(-2)=-\frac{2!}{2^3} \\
f'''(x)=-1\cdot 2\cdot 3x^{-4} & f'''(-2)=-\frac{3!}{2^4} \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\
f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\, x^{-n-1} & f^{(n)}(-2)=-\frac{n!}{2^{n+1}} \\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Подставляя эти значения в ряд Тейлора (Т) для произвольной функции, получим

$$\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}-\frac{1!\,(x+2)}{2^2\,1!}-\frac{2!\,(x+2)^2}{2^3\,2!}-\frac{3!\,(x+2)^3}{2^4\,3!}-\ldots-\frac{n!\,(x+2)^n}{2^{n+1}\,n!}-\ldots$$

$$\ldots=-\frac{1}{2}\left[1+\frac{x+2}{2}+\frac{(x+2)^2}{2^2}+\frac{(x+2)^3}{2^3}+\ldots+\frac{(x+2)^n}{2^n}+\ldots\right].$$

Б) Исследуем сходимость полученного ряда по признаку Даламбера: $u_n = \frac{(x+2)^n}{2^n}$; $u_{n+1} = \frac{(x+2)^{n+1}}{2^{n+1}}$;

$$\rho = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{|x+2|}{2};$$

$$\rho < 1, \text{ если } \frac{|x+2|}{2} < 1.$$

Решая это неравенство, находим интервал $-4 < x < 0$.

Границы этого интервала исследуем особо. Подставляя в ряд $x = -4$, затем $x = 0$, получим числовые ряды $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ и $1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$, которые расходятся, так как у них не выполняется необходимое условие сходимости ряда $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

Следовательно, интервал сходимости полученного ряда Тейлора для данной функции есть $(-4; 0)$. Исследуя остаточный член R_n формулы Тейлора для данной функции, можно убедиться, что в указанном интервале полученный ряд сходится именно к данной функции.

2) А. $y = \cos x$ $\qquad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$y' = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y'' = -\cos x = \cos\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) \qquad y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y''' = \sin x = \cos\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right) \qquad y'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \qquad y^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 - \frac{x - \frac{\pi}{4}}{1!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3}{3!} + \ldots\right].$$

Б. Исследуем соответствующий остаточный член R_n формулы Тейлора:

$$R_n = \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{n+1}}{(n+1)!} \cos\left[\frac{\pi}{4} + \theta\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + (n+1)\frac{\pi}{2}\right], \quad 0 < \theta < 1.$$

При любом x $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, что было доказано в решении задачи 40, а $|\cos\alpha| \leqslant 1$. Поэтому $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n = 0$ при любом x, т. е. полученный ряд Тейлора для $\cos x$ сходится к $\cos x$ при любом x.

1014. Написать три первых члена ряда Маклорена для функции: 1) $\sec x$; 2) $\ln(e^x + x)$.

1015. Написать три первых члена ряда Тейлора для функции:

1) $\frac{1}{1-x}$ при $a=2$; 2) $x^3 \ln x$ при $a=1$.

1016. Разложить в ряд Маклорена функции: 1) 10^x; 2) $\ln(1-x)$; 3)* $\cos(x-1)$.

1017. Разложить в ряд Тейлора функции:

1) e^x при $a=-2$; 2) $\sqrt{x}$ при $a=4$; 3) $\cos\frac{x}{2}$ при $a=\frac{\pi}{2}$.

§ 5. Действия со степенными рядами. Применение рядов к приближенным вычислениям

Два степенных ряда можно почленно складывать и умножать (по правилу умножения многочленов). При этом интервалом сходимости полученного нового степенного ряда будет совокупность всех точек, в которых одновременно сходятся оба ряда. *

Степенной ряд в интервале его сходимости можно почленно интегрировать, а внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать.

Использование этих правил для разложения функций в ряды и применение рядов для вычисления приближенных значений функций и интегралов разъясняется в решении следующих задач.

1018. Используя ряды Маклорена для функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$ и правила умножения и сложения степенных рядов, найти разложения в ряд по степеням x для следующих функций: 1) $(1+x)e^x$; 2) $\sin^2 x$; 3) $\frac{x-3}{(x+1)^2}$; 4) $e^{-x}\sin x$; 5) $\ln(1+3x+2x^2)$.

Решение. 1) Рассматриваем двучлен $1+x$ как степенной ряд, у которого коэффициенты всех членов, кроме двух первых, равны нулю и который сходится на всей числовой оси. Умножая почленно этот ряд на ряд Маклорена для функции e^x, который также сходится на всей числовой оси, получим искомое разложение в ряд данной функции:

$$(1+x)e^x=(1+x)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\right)=$$
$$=1+\frac{2}{1!}x+\frac{3}{2!}x^2+\frac{4}{3!}x^3+\ldots+\frac{n+1}{n!}x^n+\ldots,$$

которое справедливо, т. е. сходится к данной функции, при всех значениях x.

---

* Иногда в этот интервал включаются и некоторые точки, в которых сходится только один из исходных рядов.