1015. Написать три первых члена ряда Тейлора для функции:

1) $\frac{1}{1-x}$ при $a=2$; 2) $x^3 \ln x$ при $a=1$.

1016. Разложить в ряд Маклорена функции: 1) 10^x; 2) $\ln(1-x)$; 3)* $\cos(x-1)$.

1017. Разложить в ряд Тейлора функции:

1) e^x при $a=-2$; 2) $\sqrt{x}$ при $a=4$; 3) $\cos\frac{x}{2}$ при $a=\frac{\pi}{2}$.

§ 5. Действия со степенными рядами. Применение рядов к приближенным вычислениям

Два степенных ряда можно почленно складывать и умножать (по правилу умножения многочленов). При этом интервалом сходимости полученного нового степенного ряда будет совокупность всех точек, в которых одновременно сходятся оба ряда.*

Степенной ряд в интервале его сходимости можно почленно интегрировать, а внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать.

Использование этих правил для разложения функций в ряды и применение рядов для вычисления приближенных значений функций и интегралов разъясняется в решении следующих задач.

1018. Используя ряды Маклорена для функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$ и правила умножения и сложения степенных рядов, найти разложения в ряд по степеням x для следующих функций: 1) $(1+x)e^x$; 2) $\sin^2 x$; 3) $\frac{x-3}{(x+1)^2}$; 4) $e^{-x}\sin x$; 5) $\ln(1+3x+2x^2)$.

Решение. 1) Рассматриваем двучлен $1+x$ как степенной ряд, у которого коэффициенты всех членов, кроме двух первых, равны нулю и который сходится на всей числовой оси. Умножая почленно этот ряд на ряд Маклорена для функции e^x, который также сходится на всей числовой оси, получим искомое разложение в ряд данной функции:

$$(1+x)e^x=(1+x)\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\right)=$$
$$=1+\frac{2}{1!}x+\frac{3}{2!}x^2+\frac{4}{3!}x^3+\ldots+\frac{n+1}{n!}x^n+\ldots,$$

которое справедливо, т. е. сходится к данной функции, при всех значениях x.

---

* Иногда в этот интервал включаются и некоторые точки, в которых сходится только один из исходных рядов.

2) Ряд для $\sin^2 x$ можно получить почленным умножением самого на себя известного ряда Маклорена для $\sin x$:

$$\sin^2 x = \sin x \sin x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right) =$$
$$= x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \ldots$$

Полученный ряд, как и ряд для $\sin x$, сходится при всех значениях x.

Тот же результат можно получить, исходя из формулы $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ и пользуясь рядом для $\cos 2x$:

$$\cos 2x = 1 - \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^4}{4!}x^4 - \ldots + (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!}x^{2n} + \ldots,$$

который получается из ряда Маклорена для $\cos x$ путем замены x на $2x$.

3) Преобразуем данную функцию в произведение $\frac{x-3}{(x+1)^2} = (x-3)(x+1)^{-2}$; рассматриваем двучлен $x-3$ как степенной ряд, сходящийся при любом значении x; пользуясь биномиальным рядом (Б), полагая в нем $m = -2$, разлагаем в ряд бином $(1+x)^{-2}$:

$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots + (-1)^{n-1} nx^{n-1} + \ldots \qquad (*)$$

Умножая почленно этот ряд на $x-3$, получим искомый ряд для данной функции:

$$\frac{x-3}{(x+1)^2} = -3 + 7x - 11x^2 + \ldots + (-1)^{n-1}(1-4n)x^{n-1} + \ldots,$$

который сходится к данной функции в интервале $(-1; 1)$, поскольку в этом интервале сходится к биному $(1+x)^{-2}$ ряд (*).

4) Ряд для функции $e^{-x}\sin x$ найдем почленным умножением ряда для e^{-x} (получаемого из ряда Маклорена для e^x при замене x на $-x$) на ряд Маклорена для $\sin x$:

$$e^{-x}\sin x = \left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots\right)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right) =$$
$$= x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{40}x^5 + \frac{7}{360}x^6 + \ldots$$

Полученный ряд сходится к данной функции во всем своем интервале сходимости — на всей числовой оси, ибо ряды для e^{-x} и $\sin x$ сходятся к этим функциям на всей числовой оси.

5) Преобразуем данную функцию: $\ln(1 + 3x + 2x^2) = \ln(1 + x)(1 + 2x) = \ln(1 + x) + \ln(1 + 2x)$. Пишем ряды Маклорена

для полученных слагаемых функций:

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}, \quad -1<x\leqslant 1;$$

$$\ln(1+2x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n x^n}{n}, \quad -\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{1}{2}$$

(второй ряд получен из первого путем замены x на $2x$) и складывая их почленно, имеем

$$\ln(1+3x+2x^2)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}(1+2^n)\frac{x^n}{n}, \quad -\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{1}{2}.$$

Все полученные в решении этой задачи ряды для заданных функций являются рядами Маклорена для этих функций, ибо вообще, *если какая-либо функция разлагается в степенной ряд, то он является ее рядом Тейлора.*

1019. Пользуясь соответствующими рядами, вычислить с точностью до 0,0001: 1) $\ln 1{,}1$; 2) $\sqrt[4]{17}$.

Решение. Для вычисления приближенных значений функции с заданной точностью удобно пользоваться рядами в том случае, когда соответствующий ряд является знакочередующимся; для знакочередующегося сходящегося ряда легко оценить погрешность приближенного значения суммы — она меньше абсолютного значения первого из отброшенных членов (§ 2).

В других случаях приближенные значения функции с заданной точностью вычисляются по формуле Тейлора (Маклорена), как это показано в решении задачи 299 (гл. III, § 1).

1) Возьмем ряд для функции $\ln(1+x)$, полученный в решении задачи 1012:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,$$

который сходится к $\ln(1+x)$ в интервале $(-1;\ 1]$, и, полагая $x=0{,}1$, получим ряд для вычисления $\ln 1{,}1$ с любой точностью:

$$\ln 1{,}1=0{,}1-\frac{0{,}1^2}{2}+\frac{0{,}1^3}{3}-\frac{0{,}1^4}{4}+\ldots$$

Абсолютное значение четвертого члена этого ряда меньше 0,0001. Поэтому, согласно свойству знакочередующегося сходящегося ряда (§ 2), для вычисления приближенного значения $\ln 1{,}1$ с точностью до 0,0001 достаточно взять сумму трех первых членов ряда

$$\ln 1{,}1\approx 0{,}1-\frac{0{,}01}{2}+\frac{0{,}001}{3}\approx 0{,}0953.$$

2) Преобразуем данный корень $\sqrt[4]{17}=\sqrt[4]{16+1}=2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$ и применяем биномиальный ряд (Б), полученный в решении задачи 1012, полагая $x=\frac{1}{16}$, $m=\frac{1}{4}$:

$$2\left(1+\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}=2\left[1+\frac{1}{4\cdot 16}-\frac{1\cdot 3}{4\cdot 8\cdot 16^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 7}{4\cdot 8\cdot 12\cdot 16^3}-\ldots\right].$$

Чтобы определить, сколько взять первых членов этого знакочередующегося сходящегося ряда для вычисления $\sqrt[4]{17}$ с точностью до 0,0001, вычисляем несколько последовательных первых членов ряда: $a_1=1$; $a_2\approx 0{,}01562$; $a_3\approx -0{,}00037$; $a_4\approx 0{,}00001$.

Согласно свойству знакочередующегося сходящегося ряда, если ограничиться суммой трех первых членов ряда, то ошибка искомого приближенного значения корня будет меньше $2a_4\approx$ $\approx 2\cdot 0{,}00001<0{,}0001$. Следовательно,

$$\sqrt[4]{17}\approx 2(1+0{,}01562-0{,}00037)\approx 2{,}0305.$$

1020. Найти разложение в ряд функции $\operatorname{arctg} x$, исходя из выражения ее в виде интеграла: $\operatorname{arctg} x=\int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^2}$, разлагая подынтегральную функцию в ряд Маклорена и почленно его интегрируя.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию $\frac{1}{1+t^2}=$ $=(1+t^2)^{-1}$ и разложим ее в биномиальный ряд (Б), полагая в нем $x=t^2$, $m=-1$:

$$(1+t^2)^{-1}=1-t^2+t^4-t^6+\ldots+(-1)^{n-1}t^{2n-2}+\ldots$$

Интегрируя в пределах от 0 до x, получим искомый ряд

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots,$$

который сходится к $\operatorname{arctg} x$ в интервале $(-1;\ 1)$, ибо разложение подынтегральной функции в биномиальный ряд справедливо в этом интервале. Можно доказать, что полученный ряд сходится к $\operatorname{arctg} x$ и на границах этого интервала при $x=\pm 1$.

1021. Найти ряд Маклорена для функции $\arcsin x$, исходя из выражения ее в виде интеграла: $\arcsin x=\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Решение. Как и в решении предыдущей задачи, преобразуем подынтегральную функцию $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}=(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}$, разложим ее в биномиальный ряд (Б), полагая в нем $x=-t^2$, $m=-\frac{1}{2}$:

$$(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}t^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}t^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}t^6+\ldots+$$
$$+\frac{1\cdot3\ldots(2n-1)}{2\cdot4\ldots2n}t^{2n}+\ldots$$

и интегрируя в пределах от 0 до x, получим искомый ряд

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{x^7}{7}+\ldots+$$
$$+\frac{1\cdot3\ldots(2n-1)}{2\cdot4\ldots2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,$$

который сходится к $\arcsin x$ при $|x|\leqslant1$.

1022. Разлагая подынтегральную функцию в ряд Маклорена и интегрируя его почленно, найти разложения в ряд следующих интегралов:

1) $\int\sin x^2\,dx$; 2) $\int\sqrt{x}\,e^x\,dx$; 3) $\int\sqrt{1-x^3}\,dx$.

Решение. 1) Пользуясь рядом Маклорена для $\sin x$, заменяя в нем x на x^2, имеем

$$\sin x^2=x^2-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^{10}}{5!}-\frac{x^{14}}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!}+\ldots$$

Почленно интегрируя, получим искомое разложение

$$\int\sin x^2\,dx=\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{3!\,7}+\frac{x^{11}}{5!\,11}-\frac{x^{15}}{7!\,15}+\ldots+C,$$

которое справедливо при любом значении x.

2) Заменяя функцию e^x ее рядом Маклорена, почленно умножая его на $\sqrt{x}$ и интегрируя, получим

$$\int\sqrt{x}\,e^x\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots\right)dx=$$
$$=\int\left(x^{\frac{1}{2}}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{1!}+\frac{x^{\frac{5}{2}}}{2!}+\ldots+\frac{x^{\frac{2n+1}{2}}}{n!}+\ldots\right)dx=$$
$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{1!\,5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{2!\,7}x^{\frac{7}{2}}+\ldots+\frac{2}{n!\,(2n+3)}x^{\frac{2n+3}{2}}+\ldots+C.$$

Полученный ряд сходится к искомому интегралу при $x\geqslant0$.

3) Разложим подынтегральную функцию в биномиальный ряд (Б)

$$\sqrt{1-x^3}=(1-x^3)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{1!\,2}x^3-\frac{1}{2!\,2^2}x^6-\frac{1\cdot3}{3!\,2^3}x^9-\ldots$$

и интегрируя почленно, получим искомый ряд

$$\int\sqrt{1-x^3}\,dx = x-\frac{x^4}{1!\,2\cdot 4}-\frac{x^7}{2!\,2^2\,7}-\frac{1\cdot 3x^{10}}{3!\,2^3\,10}-\ldots+C,$$

который сходится при $|x|<1$.

1023. С помощью рядов вычислить с точностью до 0,0001 приближенные значения следующих интегралов:

$$I_1=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}};\quad I_2=\int\limits_0^{1}\cos\sqrt{x}\,dx;\quad I_3=\int\limits_1^{1,5}\frac{1}{v}\operatorname{arctg}\frac{v}{4}\,dv.$$

Решение. 1) Разложим подынтегральную функцию в биномиальный ряд (Б), полагая в нем $x=t^4$, $m=-\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}=(1+t^4)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}t^4+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^8-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}t^{12}+\ldots$$

Этот ряд сходится к биному $(1+t^4)^{-\frac{1}{2}}$ при $|t|<1$.

Интегрируя в пределах от 0 до $\frac{1}{2}$, найдем

$$I_1=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}=t-\frac{1}{2}\frac{t^5}{5}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{t^9}{9}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{t^{13}}{13}+\ldots\Big|_0^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 5\cdot 2^5}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 9\cdot 2^9}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 13\cdot 2^{13}}+\ldots$$

Вычислим несколько последовательных первых членов полученного знакочередующегося сходящегося ряда (с одним лишним знаком): $a_1=0{,}50000$; $a_2\approx -0{,}00313$; $a_3\approx 0{,}00008$.

Согласно свойству знакочередующегося сходящегося ряда (§ 2), для вычисления интеграла с точностью до 0,0001 достаточно взять сумму двух первых членов ряда $I_1\approx a_1+a_2\approx 0{,}4969$.

Ошибка этого приближенного значения меньше абсолютного значения первого из отброшенных членов ряда, т. е. меньше $a_3\approx 0{,}00008$.

2) Пользуясь рядом Маклорена для $\cos x$, заменяя в нем x на $\sqrt{x}$, имеем

$$\cos\sqrt{x}=1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\frac{x^3}{6!}+\frac{x^4}{8!}-\ldots\ (x\geqslant 0).$$

Интегрируя в указанных пределах, получим

$$I_2=\int\limits_0^1\cos\sqrt{x}\,dx=x-\frac{x^2}{2!\,2}+\frac{x^3}{4!\,3}-\frac{x^4}{6!\,4}+\frac{x^5}{8!\,5}-\ldots\Big|_0^1=$$

$$=1-\frac{1}{2!\,2}+\frac{1}{4!\,3}-\frac{1}{6!\,4}+\frac{1}{8!\,5}-\ldots$$

Пятый член этого знакочередующегося сходящегося ряда меньше 0,0001. Поэтому для вычисления искомого приближенного значения интеграла достаточно взять сумму четырех первых членов ряда:

$$I_2 \approx 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{72}-\frac{1}{2880}\approx 0{,}7635.$$

3) Пользуясь рядом Маклорена для $\operatorname{arctg} x$, при $x=\frac{v}{4}$, получим

$$\operatorname{arctg}\frac{v}{4}=\frac{v}{4}-\frac{v^3}{4^3\cdot 3}+\frac{v^5}{4^5\cdot 5}-\frac{v^7}{4^7\cdot 7}+\ldots\ (|v|\leqslant 4).$$

Деля обе части равенства на v и интегрируя, найдем

$$I_3=\int\limits_1^{1,5}\frac{1}{v}\operatorname{arctg}\frac{v}{4}\,dv=\frac{v}{4}-\frac{v^3}{4^3\cdot 3^2}+\frac{v^5}{4^5\cdot 5^2}-\frac{v^7}{4^7\cdot 7^2}+\ldots\Big|_1^{1,5}=$$

$$=\frac{1{,}5-1}{4}-\frac{1{,}5^3-1}{4^3\cdot 3^2}+\frac{1{,}5^5-1}{4^5\cdot 5^2}-\frac{1{,}5^7-1}{4^7\cdot 7^2}+\ldots\approx$$

$$\approx 0{,}12500-0{,}00412+0{,}00026-0{,}00002+\ldots$$

Полученный результат представляет знакочередующийся сходящийся ряд. Взяв сумму трех его первых членов, получим приближенное значение интеграла с заданной точностью: $I_3\approx 0{,}1211$, ибо абсолютное значение четвертого члена меньше 0,0001.

1024. Пользуясь рядами, полученными в решениях задач 1011, 1012, 1020, и правилами сложения и умножения степенных рядов, найти разложения в степенные ряды следующих функций:

1) $x\cos 2x$; 2) $\ln\frac{1+x}{1-x}$; 3) $(1+x^2)\operatorname{arctg} x$;

4) $\frac{x}{2-x}$; 5)* $e^x\sin x$; 6)* $(1+e^x)^2$.

1025. Пользуясь рядами, вычислить с точностью до 0,0001:

1) $\cos 0{,}3$; 2) $\sin 0{,}4$; 3) $\operatorname{arctg} 0{,}2$; 4) $\sqrt[3]{30}$.

1026. Разлагая подынтегральную функцию в ряд Маклорена и интегрируя его почленно, найти разложения в ряд следующих интегралов:

1) $\int x^3\operatorname{arctg} x\,dx$; 2) $\int\frac{e^t}{t}\,dt$; 3) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$;

4) $\int\frac{1-\cos x}{x}\,dx$; 5)* $\int\frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$.

1027. Пользуясь рядами, вычислить с точностью до 0,001 следующие интегралы:

1) $\int\limits_0^{0,5} \cos\frac{x^2}{4}\,dx$; 2) $\int\limits_0^{0,2} \sqrt[3]{1+x^2}\,dx$; 3) $\int\limits_0^{1} \frac{\sin x}{x}\,dx$;

4) $\int\limits_0^{0,25} \ln(1+\sqrt{x})\,dx$; 5)* $\int\limits_0^{0,125} \sqrt[3]{x}\cos^2 x\,dx$.

§ 6. Числовые и степенные ряды с комплексными членами

Числовым рядом с комплексными членами называется ряд

$$c_1+c_2+\ldots+c_n+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty} c_n,$$

где $c_1=a_1+b_1i$, $c_2=a_2+b_2i$, $\ldots$, $c_n=a_n+b_ni$, $\ldots$ — комплексные числа ($i=\sqrt{-1}$; a_1, b_1, a_2, b_2, $\ldots$, a_n, b_n, $\ldots$ — действительные числа).

Сходимость и сумма числового ряда с комплексными членами определяются так же, как и для числового ряда с действительными членами (§ 1). Выполнение условия $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n=0$ есть необходимый (но недостаточный) признак сходимости, а не выполнение этого условия есть достаточный признак расходимости всякого числового ряда с комплексными членами.

Исследование сходимости ряда с комплексными членами можно свести к исследованию сходимости двух рядов с действительными членами:

Ряд с комплексными членами

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n=\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_ni) \tag{1}$$

будет сходящимся, если сходятся два ряда с действительными членами

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n. \tag{2}$$

При этом, если ряды (2) сходятся соответственно к суммам A и B, то ряд (1) сходится к сумме $C=A+Bi$. Если же хотя бы один из двух рядов (2) расходится, то и комплексный ряд (1) также расходится.

Ряд с комплексными членами (1) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд с действительными положительными