1027. Пользуясь рядами, вычислить с точностью до 0,001 следующие интегралы:

$$1)\ \int\limits_0^{0,5} \cos\frac{x^2}{4}\,dx;\quad 2)\ \int\limits_0^{0,2} \sqrt[3]{1+x^2}\,dx;\quad 3)\ \int\limits_0^{1} \frac{\sin x}{x}\,dx;$$

$$4)\ \int\limits_0^{0,25} \ln(1+\sqrt{x})\,dx;\quad 5)^*\ \int\limits_0^{0,125} \sqrt[3]{x}\cos^2 x\,dx.$$

§ 6. Числовые и степенные ряды с комплексными членами

Числовым рядом с комплексными членами называется ряд

$$c_1+c_2+\ldots+c_n+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty} c_n,$$

где $c_1=a_1+b_1i$, $c_2=a_2+b_2i$, $\ldots$, $c_n=a_n+b_ni$, $\ldots$ — комплексные числа ($i=\sqrt{-1}$; a_1, b_1, a_2, b_2, $\ldots$, a_n, b_n, $\ldots$ — действительные числа).

Сходимость и сумма числового ряда с комплексными членами определяются так же, как и для числового ряда с действительными членами (§ 1). Выполнение условия $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n=0$ есть необходимый (но недостаточный) признак сходимости, а не выполнение этого условия есть достаточный признак расходимости всякого числового ряда с комплексными членами.

Исследование сходимости ряда с комплексными членами можно свести к исследованию сходимости двух рядов с действительными членами:

Ряд с комплексными членами

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n=\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_ni) \qquad (1)$$

будет сходящимся, если сходятся два ряда с действительными членами

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n. \qquad (2)$$

При этом, если ряды (2) сходятся соответственно к суммам A и B, то ряд (1) сходится к сумме $C=A+Bi$. Если же хотя бы один из двух рядов (2) расходится, то и комплексный ряд (1) также расходится.

Ряд с комплексными членами (1) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд с действительными положительными членами

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|c_n|=\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n+b_ni|=\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{a_n^2+b_n^2}, \qquad (3)$$

составленный из модулей его членов. Если же ряд (1) сходится, а ряд (3) расходится, то ряд (1) называется неабсолютно сходящимся.

Абсолютная сходимость ряда есть достаточный (но не необходимый) признак сходимости ряда, т. е. *если ряд сходится абсолютно, то он сходящийся.*

Для исследования сходимости комплексных рядов можно пользоваться признаком Даламбера: *если* $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}=$ $=\lim\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\rho$, *то при* $\rho<1$ *ряд сходится* (абсолютно), *а при* $\rho>1$ *расходится.*

Если z есть комплексная переменная, т. е. величина, принимающая различные числовые комплексные значения, $z=x+iy$, где x и y — действительные переменные, то ряд

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n, \qquad (4)$$

где a_0, a_1, ..., a_n, ... — комплексные постоянные, называется степенным рядом с комплексными членами.

Если изображать комплексное число $a+bi$ точкой (a, b) плоскости xOy, то *область сходимости всякого степенного ряда* (4) *с комплексными членами* (т. е. совокупность точек, в которых ряд сходится) *представляет круг с центром в начале координат*.*

Радиус R круга сходимости комплексного степенного ряда называется радиусом сходимости этого ряда. При $R=0$ ряд сходится только в одной точке (0, 0), т. е. $z=0$, а при $R=+\infty$ — во всех точках комплексной плоскости xOy.

Показательная функция e^z комплексного аргумента $z=x+iy$ определяется как сумма степенного ряда

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots,$$

которая существует при любом значении z [см. решение задачи 1029 (2)].

Отсюда при $z=iy$ $(x=0)$, затем при $z=-iy$ получаются, соответственно, следующие формулы Эйлера:

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y; \quad e^{-iy}=\cos y-i\sin y, \qquad (5)$$

* На границе (окружности) круга сходимости комплексного степенного ряда могут быть как точки сходимости этого ряда, так и точки его расходимости.

которые выражают показательные функции через тригонометрические. Путем их сложения и вычитания получаются еще две формулы:

$$\cos y = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}; \quad \sin y = \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}, \tag{6}$$

которые выражают тригонометрические функции через показательные. Они также называются формулами Эйлера.

1028. Исследовать сходимость ряда с комплексными членами:

1) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{3-2i}{1+\sqrt{n}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n(3i-1)^n}{5^n}$; 3) $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2n-1}+\frac{i}{2n+1}\right)$.

Решение. 1) Заданный общий член ряда есть комплексное число, действительная часть которого $a_n = \frac{3}{1+\sqrt{n}}$ и мнимая часть $b_n = -\frac{2}{1+\sqrt{n}}$. Здесь числовые ряды с действительными членами $\sum a_n$ и $\sum b_n$ оба расходятся, что следует из сравнения их с гармоническим рядом $\sum \frac{1}{n}$. Поэтому данный ряд с комплексными членами также расходится.

2) Используем признак Даламбера. По заданному члену ряда c_n найдем следующий за ними член c_{n+1}:

$$c_n = \frac{n(3i-1)^n}{5^n}; \quad c_{n+1} = \frac{(n+1)(3i-1)^{n+1}}{5^{n+1}}$$

и вычислим предел отношения их модулей

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \lim\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim\left|\frac{(n+1)(3i-1)}{5n}\right| =$$

$$= \frac{|3i-1|}{5}\lim\frac{n+1}{n} = \frac{\sqrt{3^2+1^2}}{5}\cdot 1 = \frac{\sqrt{10}}{5} < 1.$$

Следовательно, согласно признаку Даламбера, данный ряд абсолютно сходящийся.

3) Здесь ряды с действительными членами $a_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}$ и $b_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ знакочередующиеся. Согласно признаку Лейбница оба они сходятся. Поэтому заданный комплексный ряд также сходится.

Ряд, членами которого являются модули членов данного ряда

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n + b_n i| = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{a_n^2+b_n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^2}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{8n^2+2}}{4n^2-1},$$

расходится (согласно признаку сравнения, ибо

$$\frac{\sqrt{8n^2+2}}{4n^2-1} > \frac{\sqrt{8n^2}}{4n^2} = \frac{1}{n\sqrt{2}} \text{ и } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{2}} = +\infty.$$

Это же следует из расходимости рядов $\Sigma|a_n|$ и $\Sigma|b_n|$).

Поэтому данный комплексный ряд сходится как таковой, но не абсолютно.

1029. Найти радиус сходимости степенного ряда с комплексными членами:

$$1) \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n(\sqrt{n-1}-i)z^n;\quad 2) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!};\quad 3) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3+4i)^n}{n^2} z^{3n}.$$

Решение. Пользуемся признаком Даламбера,

1) $u_n = 2^n(\sqrt{n-1}-i)z^n;\quad u_{n+1} = 2^{n+1}(\sqrt{n}-i)z^{n+1};$

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim\left|\frac{2(\sqrt{n}-i)}{\sqrt{n-1}-i}z\right| =$$

$$= 2|z|\lim\left|\frac{(\sqrt{n}-i)(\sqrt{n-1}+i)}{(\sqrt{n-1}-i)(\sqrt{n-1}+i)}\right| =$$

$$= 2|z|\lim\frac{|1+\sqrt{n(n-1)}+(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})i|}{n} = 2|z|\lim\frac{\sqrt{n^2+n}}{n} = 2|z|.$$

Согласно признаку Даламбера при всех значениях $z = x+iy$, удовлетворяющих неравенству $|z| < \frac{1}{2}$, данный ряд сходится, а при всех $|z| > \frac{1}{2}$ он расходится.

Геометрически данный ряд сходится внутри круга $|z| = \sqrt{x^2+y^2} < \frac{1}{2}$ и расходится вне этого круга, т. е. искомый радиус сходимости $R = \frac{1}{2}$.

На границе круга сходимости — на окружности $|z| = \frac{1}{2}$ или $x^2+y^2 = \frac{1}{4}$ данный ряд расходится, ибо во всех точках этой границы общий член ряда $c_n = \sqrt{n-1}-i$ при $n \to +\infty$ не стремится к нулю.

2) $u_n = \frac{z^n}{n!};\quad u_{n+1} = \frac{z^{n+1}}{(n+1)!};$

$$\rho = \lim_{n\to+\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim\frac{|z|}{n+1} = 0.$$

Согласно признаку Даламбера ряд абсолютно сходится при любом комплексном значении z, т. е. его радиус сходимости $R=+\infty$.

3) $u_n=\frac{(3+4i)^n}{n^2}z^{3n}$; $u_{n+1}=\frac{(3+4i)^{n+1}}{(n+1)^2}z^{3n+3}$;

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\left|\frac{n^2(3+4i)}{(n+1)^2}z^3\right|=$$
$$=|z|^3\sqrt{3^2+4^2}\lim\frac{n^2}{(n+1)^2}=5|z|^3.$$

Следовательно, ряд сходится при $5|z|^3<1$, т. е. искомый радиус сходимости ряда $R=\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$. В точках на границе круга сходимости $|z|=\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ данный ряд также сходится, так как в этих точках сходится числовой ряд $\sum\frac{1}{n^2}$, составленный из модулей его членов.

Исследовать сходимость ряда с комплексными членами:

1030. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(1+i)^{2n}}{n!}$.

1031. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}-i}{n+1}$.

1032. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n^2}+(-1)^n\frac{i}{3n}\right]$.

1033. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(3-i)^n}{10^n n}$.

Найти радиус сходимости степенного ряда с комплексными членами:

1034. $1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n^3}$.

1035. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(n!-i)z^{2n}$.

1036. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i\sqrt{3})^n}{2^{2n}}z^n$.

1037. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1+i\sqrt{n}}{n}z^n$.

1038. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n!(1+i)}{(2n-1)!}z^{3n}$.

1039. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}+(-1)^n ni}{n^2}(-z)^n$.

§ 7. Ряды Фурье

Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\left(a_1\cos\frac{\pi x}{l}+b_1\sin\frac{\pi x}{l}\right)+\left(a_2\cos\frac{2\pi x}{l}+b_2\sin\frac{2\pi x}{l}\right)+$$
$$+\left(a_3\cos\frac{3\pi x}{l}+b_3\sin\frac{3\pi x}{l}\right)+\ldots=$$
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \qquad (1)$$