Согласно признаку Даламбера ряд абсолютно сходится при любом комплексном значении z, т. е. его радиус сходимости $R=+\infty$.

3) $u_n=\frac{(3+4i)^n}{n^2}z^{3n}$; $u_{n+1}=\frac{(3+4i)^{n+1}}{(n+1)^2}z^{3n+3}$;

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim\left|\frac{n^2(3+4i)}{(n+1)^2}z^3\right|=$$

$$=|z|^3\sqrt{3^2+4^2}\lim\frac{n^2}{(n+1)^2}=5|z|^3.$$

Следовательно, ряд сходится при $5|z|^3<1$, т. е. искомый радиус сходимости ряда $R=\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$. В точках на границе круга сходимости $|z|=\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$ данный ряд также сходится, так как в этих точках сходится числовой ряд $\sum\frac{1}{n^2}$, составленный из модулей его членов.

Исследовать сходимость ряда с комплексными членами:

1030. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(1+i)^{2n}}{n!}$.

1031. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}-i}{n+1}$.

1032. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{n^2}+(-1)^n\frac{i}{3n}\right]$.

1033. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(3-i)^n}{10^n n}$.

Найти радиус сходимости степенного ряда с комплексными членами:

1034. $1+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n^3}$.

1035. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(n!-i)z^{2n}$.

1036. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(1+i\sqrt{3})^n}{2^{2n}}z^n$.

1037. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1+i\sqrt{n}}{n}z^n$.

1038. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n!\,(1+i)}{(2n-1)!}z^{3n}$.

1039. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}+(-1)^n ni}{n^2}(-z)^n$.

§ 7. Ряды Фурье

Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+\left(a_1\cos\frac{\pi x}{l}+b_1\sin\frac{\pi x}{l}\right)+\left(a_2\cos\frac{2\pi x}{l}+b_2\sin\frac{2\pi x}{l}\right)+$$
$$+\left(a_3\cos\frac{3\pi x}{l}+b_3\sin\frac{3\pi x}{l}\right)+\ldots=$$
$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \qquad (1)$$

где $l>0$, a_0, a_n, b_n $(n=1, 2, \ldots)$—постоянные, называется тригонометрическим рядом.

Все члены тригонометрического ряда—синусы и косинусы углов, кратных $\frac{\pi x}{l}$, и их сумма $S(x)$, если она существует, являются периодическими функциями от x с периодом $2l$; $S(x)=S(x+2l)$. Поэтому тригонометрические ряды широко применяются для изучения различных периодических процессов в электротехнике, радиотехнике, в теории упругих механических колебаний и во многих других областях естествознания и техники.

Разложение данной функции в тригонометрический ряд называется гармоническим анализом, ибо этим достигается разложение какого-либо сложного периодического явления на простые гармонические колебания.

Рядом Фурье для функции $f(x)$ *в интервале* $[-l, l]$ *называется тригонометрический ряд вида* (1), *если его коэффициенты* a_n и b_n *вычислены по формулам Фурье:*

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad n=0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad n=1, 2, 3, \ldots \tag{2}$$

Простейшие достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье сформулированы в следующей теореме Дирихле.

Если в интервале $[-l, l]$ *функция* $f(x)$ *имеет конечное число точек разрыва первого рода* (*или непрерывна*) *и конечное число точек экстремума* (*или не имеет их вовсе*), *то ее ряд Фурье сходится*, т. е. имеет сумму $S(x)$, *во всех точках этого интервала*. При этом:

а) *в точках непрерывности функции* $f(x)$ *он сходится к самой функции*, $S(x)=f(x)$;

б) *в каждой точке разрыва* x_k *функции—к полусумме односторонних пределов функции слева и справа,*

$$S(x_k)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_k-0} f(x)+\lim_{x\to x_k+0} f(x)\right];$$

в) *в обеих граничных точках интервала* $[-l, l]$—*к полусумме односторонних пределов функции при стремлении* x *к этим точкам изнутри интервала,*

$$S(-l)=S(l)=\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to -l+0} f(x)+\lim_{x\to l-0} f(x)\right].$$

Для четной функции $f(x)=f(-x)$ все коэффициенты $b_n=0$* и соответствующий ряд Фурье не содержит

* Согласно решению задачи 592.

синусов

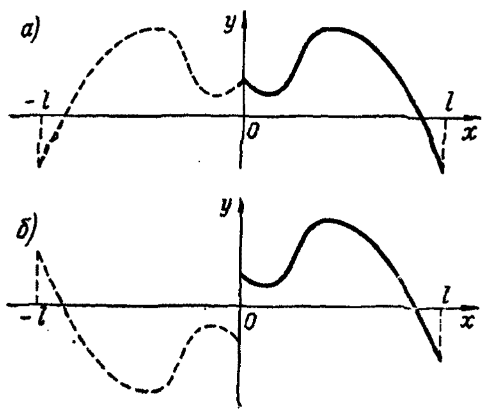
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}, \quad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \tag{3}$$

$$n=0, 1, 2, \ldots$$

Для нечетной функции $f(x)=-f(-x)$ все коэффициенты $a_n=0$ и соответствующий ряд Фурье содержит только синусы

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \; n=1, 2, 3, \ldots \tag{4}$$

Если функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям теоремы Дирихле, является периодической, то на всей числовой оси ее ряд Фурье в точках непрерывности функции сходится к самой функции, а в каждой точке разрыва функции — к полусумме ее односторонних пределов.



Черт. 201

Функцию $f(x)$, заданную в интервале $[0, l]$, можно произвольно продолжить в соседний интервал $[-l, 0)$ и поэтому ее можно представить различными рядами Фурье. Пользуясь этим, такую функцию обычно представляют неполным рядом Фурье, содержащим только косинусы или только синусы.

Ряд по косинусам получается при четном, а ряд по синусам при нечетном продолжении данной функции на соседний слева интервал $[-l, 0)$. В первом случае график данной функции продолжается на интервал $[-l, 0)$ симметрично относительно оси ординат, а во втором случае — симметрично относительно начала координат, черт. 201 *а*, *б*.

С помощью формул Эйлера (§ 6) получается удобная во многих случаях комплексная форма ряда Фурье:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{l}}, \text{ где } c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{-\frac{in\pi x}{l}}\, dx. \qquad (5)$$

Если функция $f(x)$ задана несколькими различными формулами на разных частях интервала $[-l, l]$, то при разложении ее в ряд Фурье, при вычислении интегралов в формулах (2) или (5) для коэффициентов ряда, следует разбить интервал интегрирования точками, в которых меняется аналитическое выражение функции, на части и затем вычислять указанные интегралы как сумму интегралов по составляющим частям.

При разложении функции $f(x)$ в ряд Фурье в интервале $[0, 2l]$ пределы интегралов в формулах (2) или (5) будут 0 и $2l$, а в случае произвольного интервала $[a, b]$ длины $2l$ эти пределы будут a и $a+2l$.

1040. Разложить в ряд Фурье данную функцию в указанном интервале:

1) $\varphi(x)=\frac{x}{2}$; $(0, 2\pi)$; 2) $y=\begin{cases} 6 \text{ при } 0<x<2 \\ 3x \text{ при } 2<x<4; \end{cases}$

3) $\psi(x)=e^{-x}$; $(-\pi, \pi)$;

4) $u=|\sin x|$; $[-\pi, \pi]$. *Пользуясь полученным разложением*, найти сумму S ряда $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\ldots$

Решение. Вначале проверяем, что данная функция в указанном интервале удовлетворяет условиям Дирихле; затем вычисляем коэффициенты a_n и b_n (или c_n) по формулам Фурье и, подставляя их в ряд (1) [или (5)], получаем искомое разложение данной функции в ряд Фурье; наконец, основываясь на теореме Дирихле, определяем, при каких значениях x полученный ряд сходится к данной функции.

1) Данная функция не четная и не нечетная, поэтому вычисляем ее коэффициенты Фурье по общим формулам (2), полагая $l=\pi$ и беря пределами интегралов 0 и 2π, поскольку функция задана в интервале $(0, 2\pi)$:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{x}{2}\cos nx\, dx=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx-\frac{1}{n}\int \sin nx\, dx\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{1}{2\pi n^2}\cos nx\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{\cos 2n\pi-1}{2\pi n^2}.$$

(Для вычисления интеграла применена формула интегрирования по частям.)

При $n=1, 2, 3, \ldots, n\neq 0$, $a_n=0$; при $n=0$ полученное здесь выражение для a_n не имеет смысла. Поэтому коэффициент a_0 вычисляем отдельно по формуле (2), полагая $n=0$ ($\cos nx=1$):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{x}{2}\,dx=\frac{x^2}{4\pi}\Big|_0^{2\pi}=\pi;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{x}{2}\sin nx\,dx=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{x\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{2\pi}=-\frac{1}{n}.$$

Подставляя значения коэффициентов a_n и b_n в тригонометрический ряд (1), получим искомое разложение данной функции в ряд Фурье:

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi}{2}-\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 3x}{3}-\ldots$$

Это разложение справедливо, т. е. полученный ряд сходится к данной функции во всех точках ее области определения $0<x<2\pi$. (В граничных точках $x=0$ и $x=2\pi$ сумма ряда равна $\frac{\pi}{2}$, в этих точках все члены ряда, кроме первого, обращаются в нуль. То же значение имеет сумма ряда в указанных точках и по теореме Дирихле.)

2) Пользуясь формулами (2), полагая $l=2$ и разбивая интервал интегрирования (0; 4) точкой $x=2$ на две части, поскольку *в каждой из них функция задана различными формулами*, получим:

$$a_n=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 y\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^2 6\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx+\int\limits_2^4 3x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{12}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2+3\left(\frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_2^4\right]=$$

$$=\frac{6}{n^2\pi^2}(1-\cos n\pi),\qquad n\neq 0.$$

При n четном $\cos n\pi=1$ и $a_n=0$; при n нечетном $\cos n\pi=-1$ и $a_n=\frac{12}{n^2\pi^2}$.

При $n=0$ по формуле (2) получим:

$$a_0=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 y\,dx=\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^2 6\,dx+\int\limits_2^4 3x\,dx\right)=\frac{1}{2}\left(6x\Big|_0^2+\frac{3x^2}{2}\Big|_2^4\right)=15;$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 y\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^2 6\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx+\int\limits_2^4 3x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{12}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_2^0+3\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Big|_2^4\right]=$$

$$=\frac{1}{2n\pi}[12(1-\cos n\pi)+3(4\cos n\pi-8)]=-\frac{6}{n\pi}.$$

Искомое разложение данной функции имеет вид

$$y=\frac{15}{2}+\frac{12}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{25}\cos\frac{5\pi x}{2}+\ldots\right)-$$
$$-\frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\ldots\right).$$

Оно справедливо во всей области определения данной функции: в интервале $(0;\ 2)$ сумма ряда $S(x)=6$, а в интервале $(2;\ 4)$ $S(x)=3x$. В точке разрыва $x=2$, где функция не определена,

$$S(2)=\frac{1}{2}(\lim_{x\to 2-0} y+\lim_{x\to 2+0} y)=6.$$

3) Здесь удобно использовать комплексную форму ряда Фурье. По формуле (5):

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-x}e^{-inx}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-(1+in)x}\,dx=\frac{e^{-(1+in)x}}{2\pi(1+in)}\Bigg|_{\pi}^{-\pi}=$$
$$=\frac{e^{(1+in)\pi}-e^{-(1+in)\pi}}{2\pi(1+in)}=\frac{e^{\pi}e^{in\pi}-e^{-\pi}e^{-in\pi}}{2\pi(1+in)}.$$

По формулам Эйлера $e^{\pm in\pi}=\cos n\pi\pm i\sin n\pi=(-1)^n$.

Следовательно, $c_n=\dfrac{(-1)^n(e^{\pi}-e^{-\pi})}{2\pi(1+in)}$, (а)

$$e^{-x}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_ne^{inx}=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^ne^{inx}}{1+in}.$$

В интервале $(-\pi,\ \pi)$ ряд представляет функцию e^{-x}, а в точках $x=\pm\pi$ его сумма равна $\frac{1}{2}(e^{\pi}+e^{-\pi})$.

Чтобы преобразовать полученный ряд в комплексной форме к обычной тригонометрической форме ряда Фурье (если это нужно), следует объединить слагаемые с индексами n и $-n$ и заменить в результате по формулам Эйлера (§ 6) показательные функции тригонометрическими:

$$u_n+u_{-n}=\frac{(-1)^ne^{inx}}{1+in}+\frac{(-1)^{-n}e^{-inx}}{1-in}=(-1)^n\frac{(1-in)e^{inx}+(1+in)e^{-inx}}{1+n^2}=$$
$$=2(-1)^n\frac{\cos nx+n\sin nx}{1+n^2},\qquad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Из равенства (а), полагая $n=0$, вычисляем $a_0=\dfrac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}$.

Следовательно,

$$e^{-x}=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx+n\sin nx)\right].$$

4) Данная функция четная (черт. 202), вследствие чего все коэффициенты $b_n = 0$. В интервале $[0, \pi]$ функция определяется формулой $y = \sin x$. Поэтому по формуле (3) при $l = \pi$ получим:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos nx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\sin(1+n)x + \sin(1-n)x]\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(1+n)x}{1+n} + \frac{\cos(1-n)x}{1-n}\right]\Bigg|_\pi^0 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1-\cos(1+n)\pi}{1+n} + \right.$$

$$\left. + \frac{1-\cos(1-n)\pi}{1-n}\right].$$

Если n четное, $n = 2k$, то $\cos(1 \pm n)\pi = -1$ и $a_n = \frac{4}{\pi(1-4k^2)}$.

Если n нечетное, $n \neq 1$, то $a_n = 0$.

При $n = 1$ полученное здесь общее выражение для a_n непригодно, вследствие чего коэффициент a_1 вычисляем отдельно, полагая $n = 1$, в формуле (2):

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos x\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x\, d\sin x = \frac{\sin^2 x}{\pi}\Bigg|_0^\pi = 0.$$

Подставив значения коэффициентов в ряд (1), получим искомое разложение

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{\cos 2kx}{(2k-1)(2k+1)} + \ldots\right],$$

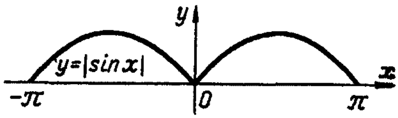
которое справедливо во всей области определения данной функции $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

При $x = 0$ полученное разложение преобразуется в равенство

$$0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \ldots\right],$$

откуда и определяется сумма числового ряда, указанного в условии:

$$S = \frac{1}{2}.$$



Черт. 202

Здесь, как и в решении задач 1040 (1, 2), оказалось, что для данной функции один из коэффициентов ряда нельзя было вычислить по найденному его общему выражению. Поэтому *при разложении данной функции в ряд Фурье, после нахождения общих выражений для коэффициентов* a_n и b_n, *следует проверять, будут ли они пригодны при всех* [указанных в формулах (2)] *значениях* n. Для тех значений n, при которых эти общие выражения теряют смысл, необходимо вычислять соответствующие коэффициенты отдельно, подставляя эти исключительные значения n в общие формулы Фурье.

1041. Разложить в ряд Фурье периодические функции:

1) $f(x)=x^2$ при $-\pi\leqslant x<\pi$; $f(x)=f(x+2\pi)$.

Пользуясь полученным разложением, найти сумму ряда:

а) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots$; б) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$

2) $\varphi(x)=x^2$ при $0<x<\pi$; $\varphi(x)=\varphi(x+\pi)$.

3) $u=\cos\frac{x}{2}$ при $0<x\leqslant 2\pi$; $u(x)=u(x+2\pi)$.

Решение. Все заданные функции удовлетворяют условиям теоремы Дирихле, что обеспечивает возможность их разложения в ряд Фурье.

1) Данная функция четная, ее график (черт. 203) симметричен относительно оси Oy. Все коэффициенты $b_n=0$, а коэффициенты a_n вычисляются по формулам (3), при $l=\pi$:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{2x}{n^2}\cos nx+\left(\frac{x^2}{n}-\frac{2}{n^3}\right)\sin nx\right]\Bigg|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{4\cos n\pi}{n^2}=(-1)^n\frac{4}{n^2},\quad n\neq 0.$$

(Здесь дважды применена формула интегрирования по частям.)

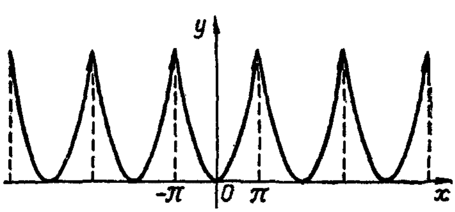
При $n=0$ (и $l=\pi$) по формуле (3) найдем:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\,dx=\frac{2x^3}{3\pi}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2\pi^2}{3}.$$

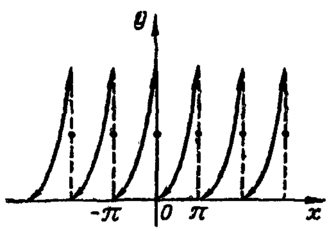
Следовательно,

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}-4\left[\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2}+\ldots\right].$$

Это разложение данной периодической и всюду непрерывной функции справедливо при любом значении x, т. е. полученный



Черт. 203



Черт. 204

ряд Фурье сходится к данной функции на всей числовой оси. *Графики данной функции и суммы ее ряда Фурье полностью совпадают.*

Полагая в полученном разложении $x=0$, найдем сумму указанного в условии числового ряда (a):

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{12},$$

а полагая $x=\pi$, найдем сумму ряда ($б$):

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}.$$

2) Вычисляем коэффициенты Фурье данной функции по общим формулам (2), полагая $l=\frac{\pi}{2}$ (период этой функции равен π, черт. 204):

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos 2nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{2n^2}\cos 2nx+\left(\frac{x^2}{2n}-\frac{1}{4n^3}\right)\sin 2nx\right]\Big|_0^\pi=$$

$$=\frac{\cos 2n\pi}{n^2}=\frac{1}{n^2},\quad n\neq 0;$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,dx=\frac{2x^3}{3\pi}\Big|_0^\pi=\frac{2}{3}\pi^2;$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\sin 2nx\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{2n^2}\sin 2nx-\left(\frac{x^2}{2n}-\frac{1}{4n^3}\right)\cos 2nx\right]\Big|_0^\pi=-\frac{\pi}{n}.$$

Подставляя найденные значения коэффициентов в ряд (1), получим

$$\varphi(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos 2nx-\frac{\pi}{n}\sin 2nx\right).$$

Разложение справедливо во всей области определения данной периодической функции—на всей числовой оси, исключая точки $x_k=k\pi$, $k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$, в которых функция разрывна (не определена). В точках разрыва функции полученный ряд также сходится. Согласно теореме Дирихле, в этих точках его сумма равна $\frac{\pi^2}{2}$. У графика данной функции нет точек с абсциссами x_k; график суммы ряда отличается от графика данной функции наличием точек $\left(x_k,\ \frac{\pi^2}{2}\right)$.

3) Функция u нечетная (черт. 205). Поэтому коэффициенты $a_n=0$, а b_n вычисляем по формуле (4):

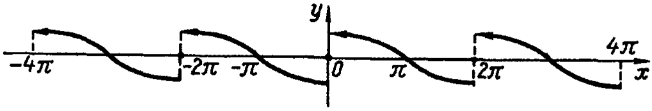
$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\cos\frac{x}{2}\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x\right]dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{n+\frac{1}{2}}+\frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x}{n-\frac{1}{2}}\right]\Bigg|_\pi^0=\frac{8n}{\pi(2n-1)(2n+1)}.$$

Следовательно,

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{8}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1\cdot3}+\frac{2\sin 2x}{3\cdot5}+\frac{3\sin 3x}{5\cdot7}+\ldots+\frac{n\sin nx}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots\right].$$

Полученное разложение данной функции справедливо во всей ее области непрерывности—при всех значениях x, кроме



Черт. 205

значений $x_k=2\pi k$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$, которые являются точками разрыва функции. В точках x_k по теореме Дирихле сумма полученного ряда равна нулю. Это же очевидно потому, что в этих точках все члены ряда обращаются в нуль. Графики суммы ряда и данной функции отличаются точками с абсциссами x_k. У графика данной функции ординаты этих точек равны -1, а у графика суммы ряда они равны 0.

1042. Разложить данную функцию в указанном интервале в неполные ряды Фурье, содержащие только косинусы или только синусы:

1) $\varphi(x)=\begin{cases}0{,}3 & \text{при } 0<x<0{,}5\\ -0{,}3 & \text{при } 0{,}5<x<1.\end{cases}$

2) $y=x\cos x$ в интервале от 0 до π. Пользуясь полученным разложением, найти сумму ряда $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{4k^2+1}{(4k^2-1)^2}$.

Решение. 1) а. Чтобы получить разложение данной функции в ряд Фурье, содержащий только косинусы, продолжаем ее на соседний слева интервал $(-1;\ 0]$ четным образом (черт. 206, *а*).

Тогда $b_n=0$, а по формуле (3), подставляя $l=1$, $\varphi(x)=0{,}3$ в интервале $(0;\ 0{,}5)$ и $\varphi(x)=-0{,}3$ в интервале $(0{,}5;\ 1)$, найдем

$$a_n=\frac{2}{1}\int_0^1\varphi(x)\cos n\pi x\,dx=2\left(\int_0^{0,5}0{,}3\cos n\pi x\,dx-\int_{0,5}^1 0{,}3\cos n\pi x\,dx\right)=$$

$$=0{,}6\left(\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_0^{0,5}-\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_{0,5}^1\right)=\frac{1{,}2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2},\qquad n\neq0.$$

Если n четное, то $a_n=0$.

Если n нечетное, $n=2k-1$, $k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, то

$$a_n=\frac{1{,}2}{(2k-1)\pi}\sin\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^{k-1}\frac{1{,}2}{(2k-1)\pi}.$$

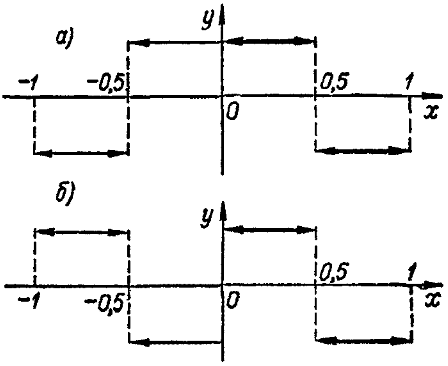
При $n=0$ по формуле (3) найдем

$$a_0=2\left(\int_0^{0,5} 0,3\,dx-\int_{0,5}^1 0,3\,dx\right)=0.$$

Следовательно, искомое разложение данной функции в неполный ряд Фурье, содержащий только косинусы, таково:

$$\varphi(x)=\frac{1,2}{\pi}\left[\frac{\cos\pi x}{1}-\frac{\cos 3\pi x}{3}+\frac{\cos 5\pi x}{5}-\ldots+(-1)^{k-1}\frac{\cos(2k-1)\pi x}{2k-1}+\ldots\right].$$

Оно справедливо во всей области определения данной функции. В интервале (0; 1) график суммы полученного ряда отличается от графика данной функции наличием точки (0,5; 0).



Черт. 206

б. Для разложения данной функции в ряд Фурье, содержащий только синусы, продолжаем ее на соседний слева интервал (— 1; 0] нечетным образом (черт. 206, б).

Тогда $a_n=0$, а по формуле (4)

$$b_n=\frac{2}{1}\int_0^1\varphi(x)\sin n\pi x\,dx=2\left(\int_0^{0,5}0,3\sin n\pi x\,dx-\int_{0,5}^1 0,3\sin n\pi x\,dx\right)=$$

$$=0,6\left(\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_{0,5}^{1}-\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^{0,5}\right)=\frac{0,6}{n\pi}\left(\cos n\pi-2\cos\frac{n\pi}{2}+1\right).$$

Если n нечетное, то $b_n=0$.

Если n четное, $n=2k$, то $b_{2k}=\dfrac{0,6\,(1-\cos k\pi)}{k\pi}$.

При четном k получим $b_n=0$, при нечетном $k=2m-1$ $b_n=\dfrac{1,2}{(2m-1)\pi}$, $n=2k=2(2m-1)$, $m=1, 2, 3, \ldots$

Искомое разложение данной функции в неполный ряд Фурье, содержащий только синусы, имеет вид

$$\varphi(x)=\frac{1,2}{\pi}\left[\frac{\sin 2\pi x}{1}+\frac{\sin 6\pi x}{3}+\frac{\sin 10\pi x}{5}+\ldots+\frac{\sin 2(2m-1)\pi x}{2m-1}+\ldots\right].$$

Оно справедливо во всей области определения функции $\varphi(x)$.

2) а. Продолжив данную функцию четным образом (черт. 207,a), имеем: $b_n=0$,

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos x\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x[\cos(n+1)x+\cos(n-1)x]\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{x\left[\frac{\sin(n+1)x}{n+1}+\frac{\sin(n-1)x}{n-1}\right]\Bigg|_0^\pi-\int_0^\pi\left[\frac{\sin(n+1)x}{n+1}+\frac{\sin(n-1)x}{n-1}\right]dx\right\}=$$

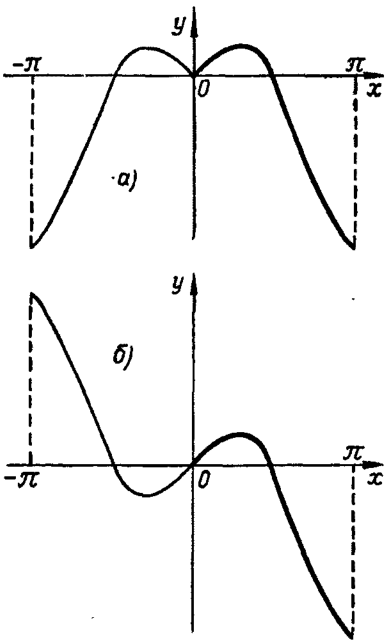
$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n+1)x}{(n+1)^2}+\frac{\cos(n-1)x}{(n-1)^2}\right]\Bigg|_0^\pi=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n+1)\pi-1}{(n+1)^2}+\frac{\cos(n-1)\pi-1}{(n-1)^2}\right].$$

Если n четное, $n=2k$, то $\cos(n\pm1)\pi=-1$ и

$$a_n=a_{2k}=-\frac{4(4k^2+1)}{\pi(4k^2-1)^2}.$$

Если n нечетное, то $\cos(n\pm1)\pi=1$ и $a_n=0$, $n\neq1$.

Коэффициент a_1 вычисляем отдельно, полагая $n=1$ в формуле (3):



Черт. 207

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos x\cos x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x(1+$$
$$+\cos 2x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^\pi x\,dx+\right.$$
$$\left.+\int_0^\pi x\cos 2x\,dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+\right.$$
$$\left.+\frac{x\sin 2x}{2}+\frac{\cos 2x}{4}\right)\Bigg|_0^\pi=\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, получаем следующее разложение данной функции в неполный ряд Фурье, содержащий только косинусы,

$$x\cos x=-\frac{2}{\pi}+\frac{\pi}{2}\cos x-$$
$$-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4k^2+1}{(4k^2-1)^2}\cos 2kx;$$

$0\leqslant x\leqslant\pi$.

Подставляя в полученное разложение $x=0$, имеем:

$$0=\frac{\pi}{2}-\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4k^2+1}{(4k^2-1)^2},\text{ откуда следует }\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4k^2+1}{(4k^2-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{2}.$$

б. Продолжив данную функцию нечетным образом (черт. 207,*б*), имеем $a_n=0$,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos x\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x[\sin(n+1)x+\sin(n-1)x]\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{x\left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]\Bigg|_\pi^0+\right.$$

$$\left.+\int_0^\pi\left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]dx\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{-\pi\left[\frac{\cos(n+1)\pi}{n+1}+\frac{\cos(n-1)\pi}{n-1}\right]\right\}=(-1)^n\frac{2n}{n^2-1},\quad n\neq 1.$$

Коэффициент b_1 вычисляем отдельно:

$$b_1=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos x\sin x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$x\cos x=-\frac{\sin x}{2}+2\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2-1}\sin nx;\quad 0\leqslant x<\pi.$$

Разложить в ряд Фурье данную функцию в указанном интервале:

1043. $f(x)=\pi-x$; $(0,\ 2\pi)$. **1044.** $\varphi(x)=x\sin x$; $[-\pi,\ \pi]$.

1045. $y=\begin{cases}0 & \text{при } -3<x\leqslant 0\\ x & \text{при } 0<x<3;\end{cases}$ пользуясь полученным разложением, найти сумму ряда $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots$

Разложить в ряд Фурье следующие периодические функции:

1046. $f(x)=|x|$ при $-1<x\leqslant 1$; $f(x)=f(x+2)$,

1047. $\varphi(x)=\sin\frac{5}{6}x$ при $-\pi<x<\pi$; $\varphi(x)=\varphi(x+2\pi)$,

1048. $y(x)=e^x$ при $-2<x<2$; $y(x)=y(x+4)$,

1049. $u=x(\pi-x)$ при $0\leqslant x<\pi$; $u(x)=u(x+\pi)$

и построить графики каждой данной функции и суммы ее ряда Фурье.

Разложить данную функцию в указанном интервале в неполный ряд Фурье, содержащий только косинусы.

1050. $f(x)=\cos x$, $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$; пользуясь полученным разложением, найти сумму ряда

$$-\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}-\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+(-1)^k\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\ldots$$

1051. $\varphi(x)=\begin{cases}1 \text{ при } 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 \text{ при } 1<x\leqslant\pi;\end{cases}$ пользуясь полученным разложением, найти сумму ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n}$.

1052. Разложить функцию $y=1$ в интервале $(0, l)$ в неполный ряд Фурье, содержащий только синусы.

1053. Разложить в неполные ряды Фурье: а) по косинусам и б) по синусам функцию

$$\varphi(x)=\begin{cases}x \text{ при } 0\leqslant x<1\\ 2-x \text{ при } 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

§ 8. Интеграл Фурье

Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси, т. е. если интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx$ сходится, *и если она удовлетворяет условиям Дирихле на любом конечном интервале, то ее можно представить интегралом Фурье*:

$$f(x)=\int\limits_0^{+\infty}[A\cos\alpha x+B\sin\alpha x]\,d\alpha, \tag{1}$$

где $A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt,\ B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt.$

Эта интегральная формула Фурье получается из ряда Фурье для функции $f(x)$ в интервале $(-l, l)$ при $l\to+\infty$.

Интеграл Фурье функции $f(x)$ сходится к этой функции всюду, кроме, быть может, точек разрыва x_k, где (как и ряд Фурье) он дает значение, равное

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_k-0}f(x)+\lim_{x\to x_k+0}f(x)\right].$$

В отличие от ряда Фурье, который дает разложение функции на гармонические колебания с дискретно меняющейся частотой $\frac{n\pi}{l}$, $n=1, 2, 3, \ldots$, интеграл Фурье дает разложение функции на гармонические колебания с непрерывно меняющейся от 0 до $+\infty$ частотой α.