нием, найти сумму ряда

$$-\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}-\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+(-1)^k\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\ldots$$

1051. $\varphi(x)=\begin{cases}1 \text{ при } 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 \text{ при } 1<x\leqslant\pi;\end{cases}$ пользуясь полученным разложением, найти сумму ряда: а) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n}$.

1052. Разложить функцию $y=1$ в интервале $(0, l)$ в неполный ряд Фурье, содержащий только синусы.

1053. Разложить в неполные ряды Фурье: а) по косинусам и б) по синусам функцию

$$\varphi(x)=\begin{cases}x \text{ при } 0\leqslant x<1\\ 2-x \text{ при } 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$$

§ 8. Интеграл Фурье

Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей числовой оси, т. е. если интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|\,dx$ сходится, *и если она удовлетворяет условиям Дирихле на любом конечном интервале, то ее можно представить интегралом Фурье*:

$$f(x)=\int\limits_0^{+\infty}[A\cos\alpha x+B\sin\alpha x]\,d\alpha, \tag{1}$$

где $A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt,\ B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt.$

Эта интегральная формула Фурье получается из ряда Фурье для функции $f(x)$ в интервале $(-l, l)$ при $l\to+\infty$.

Интеграл Фурье функции $f(x)$ сходится к этой функции всюду, кроме, быть может, точек разрыва x_k, где (как и ряд Фурье) он дает значение, равное

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_k-0}f(x)+\lim_{x\to x_k+0}f(x)\right].$$

В отличие от ряда Фурье, который дает разложение функции на гармонические колебания с дискретно меняющейся частотой $\frac{n\pi}{l}$, $n=1, 2, 3, \ldots$, интеграл Фурье дает разложение функции на гармонические колебания с непрерывно меняющейся от 0 до $+\infty$ частотой α.

Для четной или нечетной функции интеграл Фурье упрощается: Если $f(-x)=f(x)$, то

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\cos\alpha x\,d\alpha\int\limits_0^{+\infty}f(t)\cos\alpha t\,dt. \tag{2}$$

Если $f(-x)=-f(x)$, то

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\sin\alpha x\,d\alpha\int\limits_0^{+\infty}f(t)\sin\alpha t\,dt. \tag{3}$$

Если функция $f(x)$ задана только в интервале $[0, +\infty)$, то, по-разному продолжая ее в соседний слева интервал $(-\infty, 0)$, можно затем представить ее различными интегралами Фурье. Обычно такую функцию представляют интегралом Фурье или по формуле (2) или по формуле (3); по формуле (2) при четном, а по формуле (3) при нечетном продолжении этой функции в интервал $(-\infty, 0)$.

С помощью формул Эйлера (§ 6) из формулы (1) получается комплексная форма интеграла Фурье:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\alpha x}\,d\alpha\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,e^{i\alpha t}\,dt. \tag{4}$$

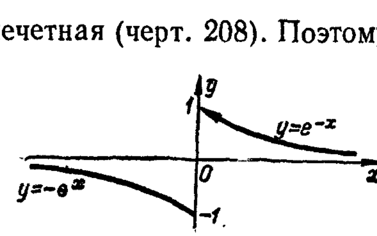
1054. Данную функцию представить в виде интеграла Фурье:

1) $\varphi(x)=\begin{cases}-e^{x} & \text{при } x\leqslant 0\\ e^{-x} & \text{при } x>0.\end{cases}$ 2) $p(x)=\begin{cases}2 & \text{при } 0<x<3\\ 1 & \text{при } x=3\\ 0 & \text{при } x>3.\end{cases}$

3) $q(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<0\\ \pi x & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & \text{при } x>1.\end{cases}$

Решение. 1) Данная функция нечетная (черт. 208). Поэтому согласно формуле (3)

$$\varphi(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\sin\alpha x\,d\alpha\int\limits_0^{+\infty}e^{-t}\sin\alpha t\,dt.$$



Черт. 208

Внутренний интеграл I вычисляем отдельно по формуле интегрирования по частям (см. задачу 484):

$$I=\lim_{\beta\to+\infty}\int\limits_0^{\beta}e^{-t}\sin\alpha t\,dt=\frac{\lim e^{-t}(\sin\alpha t+\alpha\cos\alpha t)}{1+\alpha^2}\Bigg|_{t=\beta}^{t=0}=\frac{\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Следовательно,

$$\varphi(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\alpha\sin\alpha x\,d\alpha}{1+\alpha^2},\quad x\neq 0.$$

Здесь $x\neq 0$, ибо при $x=0$ полученный интеграл Фурье равен не $\varphi(0)=-1$, а нулю — полусумме пределов данной функции при $x\to -0$ и при $x\to +0$.

2) Функция $p(x)$ определена только в интервале $(0, +\infty)$. Поэтому ее можно представить различными интегралами Фурье.

При четном продолжении данной функции в интервал $(-\infty, 0]$ по формуле (2) получим:

$$p(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\cos\alpha x\,d\alpha\int\limits_0^3 2\cos\alpha t\,dt=\frac{4}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\cos\alpha x\sin 3\alpha\,d\alpha}{\alpha}.$$

При нечетном продолжении данной функции в интервал $(-\infty, 0]$ по формуле (3) получим:

$$p(x)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\sin\alpha x\,d\alpha\int\limits_0^3 2\sin\alpha t\,dt=\frac{4}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{(1-\cos 3\alpha)\sin\alpha x\,d\alpha}{\alpha}.$$

Оба полученных интеграла Фурье представляют данную функцию во всей области ее определения, включая и точку $x=3$, в которой функция разрывна, ибо в этой точке значение каждого из полученных интегралов:

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 3-0}p(x)+\lim_{x\to 3+0}p(x)\right]=\frac{1}{2}(2+0)=1$$

и значение данной функции $p(3)=1$ — одинаковы.

3) Применяем формулу (1), вычисляем коэффициенты A и B:

$$A(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}q(t)\cos\alpha t\,dt=\frac{1}{\pi}\left[\int\limits_{-\infty}^{0}0\cdot\cos\alpha t\,dt+\pi\int\limits_0^1 t\cos\alpha t\,dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_1^{+\infty}0\cdot\cos\alpha t\,dt\right]=\frac{t\sin\alpha t}{\alpha}+\frac{\cos\alpha t}{\alpha^2}\Bigg|_{t=0}^{t=1}=\frac{\alpha\sin\alpha+\cos\alpha-1}{\alpha^2};$$

$$B(\alpha)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}q(t)\sin\alpha t\,dt=\int\limits_0^1 t\sin\alpha t\,dt=\frac{\sin\alpha-\alpha\cos\alpha}{\alpha^2}.$$

Подставляя в формулу (1), получим

$$q(x)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{(\alpha\sin\alpha+\cos\alpha-1)\cos\alpha x+(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)\sin\alpha x}{\alpha^2}\,d\alpha.$$

Это равенство справедливо, т. е. полученный интеграл сходится к функции $q(x)$, на всей числовой оси, кроме точки $x=1$, в которой эта функция разрывна. В точке $x=1$ интеграл равен $\frac{\pi}{2}$, тогда как $q(1)=\pi$.

Решение будет короче, если воспользоваться комплексной формой (4) интеграла Фурье:

$$q(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha x}\,d\alpha\int_{-\infty}^{+\infty} q(t)\,e^{i\alpha t}\,dt=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha x}\,d\alpha\int_{0}^{1} te^{i\alpha t}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{te^{i\alpha t}}{i\alpha}-\frac{e^{i\alpha t}}{i^2\alpha^2}\right)\Bigg|_0^1 e^{-i\alpha x}\,d\alpha=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\alpha}(1-i\alpha)-1}{\alpha^2}\,e^{-i\alpha x}\,d\alpha.$$

Разумеется, это представление данной функции интегралом Фурье в комплексной форме и полученное выше представление ее интегралом Фурье в обычной форме отличаются только по форме и могут быть преобразованы одно в другое с помощью формул Эйлера.

Построить графики данных функций и представить их интегралами Фурье:

1055. $y=\begin{cases}\sin x & \text{при } |x|<\pi\\ 0 & \text{при } |x|\geqslant\pi.\end{cases}$ **1056.** $z=\begin{cases}\cos x & \text{при } 0<x\leqslant\pi\\ 0 & \text{при } x>\pi.\end{cases}$

1057. $u=\begin{cases}1+x & \text{при } -1<x\leqslant 0\\ 1-x & \text{при } 0<x<1\\ 0 & \text{при } |x|\geqslant 1.\end{cases}$ **1058.** $v=\begin{cases}0 & \text{при } x\leqslant 0\\ \sin x & \text{при } 0<x<\pi\\ 0 & \text{при } x\geqslant\pi.\end{cases}$