ГЛАВА X

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Главная цель инженера-исследователя, изучающего какой-либо физический или технический процесс, заключается в выявлении его закономерности, в получении аналитического выражения функциональной зависимости между переменными параметрами этого процесса.

Большинство таких задач на отыскание связи между переменными сводится к решению уравнений, содержащих производные или дифференциалы неизвестных функций.

Огромное значение этих задач как для практики, так и в теории обусловливает особо важное значение этого раздела математического анализа.

§ 1. Дифференциальные уравнения, их порядок, общий и частные интегралы

Дифференциальным уравнением называется равенство, содержащее производные или дифференциалы неизвестной функции.

Если неизвестная функция зависит только от одного аргумента, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным, а если она зависит от нескольких аргументов и дифференциальное уравнение содержит ее частные производные по этим аргументам, то оно называется уравнением с частными производными. Уравнения с частными производными рассматриваются лишь в последнем параграфе этой главы, а все остальное ее содержание посвящено обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок высшей производной, содержащейся в этом уравнении.

Так, уравнение $y''+3xy'-x^3y^2=0$ — второго порядка,

$$\frac{d^3s}{dt^3}-ts^2\frac{ds}{dt}=5 \text{ — третьего порядка,}$$

$$y'+ye^x=\operatorname{tg}3x \text{ — первого порядка.}$$

Функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению, т. е. обращающая его в тождество, называется интегралом (или решением) этого уравнения.

Например, функция $y=2x$ является интегралом уравнения $x^2y''-2xy'+2y=0$, ибо, найдя производные этой функции $y'=2$, $y''=0$ и подставляя в данное уравнение y, y', y'', получим тождество: $-4x+4x=0$.

Интеграл дифференциального уравнения называется общим, если он содержит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения, а функции, получаемые из общего интеграла при различных числовых значениях произвольных постоянных, называются частными интегралами этого уравнения.

Так, функция $y=\frac{C_1}{x}+C_2$, удовлетворяющая уравнению 2-го порядка $xy''+2y'=0$ (в чем можно убедиться путем подстановки) и содержащая две произвольных постоянных C_1 и C_2, является общим интегралом этого уравнения, а функции $y=\frac{1}{x}$, $y=-\frac{3}{x}+5$, $y=-1$ (получающиеся из общего интеграла при различных значениях C_1 и C_2) являются его частными интегралами.

Геометрически каждому частному интегралу дифференциального уравнения соответствует плоская линия, его график, которая называется интегральной кривой этого уравнения, а общему интегралу соответствует совокупность (семейство) всех интегральных кривых.

Отыскание частного интеграла дифференциального уравнения n-го порядка ($n=1, 2, 3, \ldots$), удовлетворяющего n начальным условиям вида

$$y(x_0)=y_0;\quad y'(x_0)=y_0';\quad y''(x_0)=y_0'';\ \ldots;\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$$

называется задачей Коши.

В указанных n начальных условиях Коши задаются значения функции y и ее производных y', y'', ..., y^{n-1} при некотором заданном значении аргумента $x=x_0$. По этим n начальным условиям определяются значения всех n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, входящих в общий интеграл уравнения n-го порядка.

1059. Проверить, что данная функция является интегралом (решением) данного дифференциального уравнения:

1) $y=\sqrt{x}$, $2yy'=1$.

2) $\ln x \ln y=c$, $y\ln y\,dx+x\ln x\,dy=0$.

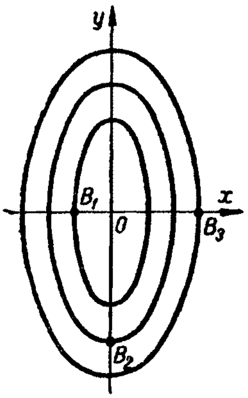
3) $s=-t-\frac{1}{2}\sin 2t$, $\frac{d^2s}{dt^2}+\operatorname{tg} t\,\frac{ds}{dt}=\sin 2t$.

Решение. 1) Найдем производную данной функции $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Подставив в данное уравнение $y=\sqrt{x}$ и $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, убедимся, что оно обращается в тождество: $2\sqrt{x}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=1$; $1=1$.

2) Дифференцируем данную неявную функцию: $\ln y\frac{dx}{x}+\ln x\frac{dy}{y}=0$ и находим $dy=-\frac{y\ln y}{x\ln x}dx$. Подставляя это выражение dy в данное уравнение, получим тождество: $y\ln y\,dx+x\ln x\left(-\frac{y\ln y}{x\ln x}dx\right)=0$; $0=0$.

3) Дважды дифференцируя данную функцию, найдем $\frac{ds}{dt}=-1-\cos 2t$, $\frac{d^2s}{dt^2}=2\sin 2t$. Подставив эти выражения для первой и второй производных в данное уравнение: $2\sin 2t+(-1-\cos 2t)\operatorname{tg} t=\sin 2t$; $\sin 2t-2\cos^2 t\operatorname{tg} t=0$; $\sin 2t-2\cos t\sin t=0$; $0=0$ убеждаемся, что оно удовлетворяется, т. е. обращается в тождество.

1060. Зная общий интеграл $4x^2+y^2=C^2$ некоторого дифференциального уравнения 1-го порядка, найти и построить его интегральные кривые (частные интегралы), проходящие через точки B_1 $(-1;\ 0)$, $B_2(0;-3)$ и $B_3(2;\ 0)$.



Черт. 209

Решение. Общий интеграл $F(x, y, C)=0$ уравнения 1-го порядка $f(x,\ y,\ y')=0$ геометрически определяет семейство интегральных кривых, зависящее от одного параметра C. Подставляя в общий интеграл координаты какой-либо точки P, найдем значение C, при котором из общего интеграла получается уравнение интегральной кривой, проходящей через точку P.

Для точки B_1: $4=C^2$; $4x^2+y^2=4$.

Для точки B_2: $9=C^2$; $4x^2+y^2=9$.

Для точки B_3: $16=C^2$; $4x^2+y^2=16$.

По найденным уравнениям интегральных кривых, проходящих через точки B_1, B_2, B_3, строим эти кривые (черт. 209). Они представляют концентрические эллипсы, оси которых расположены на осях координат.

Проверить, что данная функция является интегралом данного уравнения:

1061. $y=Ce^{-2x}$; $y'+2y=0$.

1062. $y=C_1x+C_2x^2$; $x^2y''-2xy'+2y=0$.

1063. $x^2+2xy=C$; $(x+y)\,dx+x\,dy=0$.

1064. $s=t^2\ln t+C_1t^2+C_2t+C_3$; $t\dfrac{d^3s}{dt^3}=2$.

1065*. $y-x+C_1\ln y=C_2$; $yy''-(y')^2+(y')^3=0$.

§ 2. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение первого порядка $P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=0$ называется уравнением с разделяющимися переменными, если функции P и Q разлагаются на множители, зависящие каждый только от одной переменной:

$$f_1(x)\,f_2(y)\,dx+\varphi_1(x)\,\varphi_2(y)\,dy=0. \qquad (*)$$

В таком уравнении путем деления его членов на $f_2(y)\cdot\varphi_1(x)$ переменные разделяются:

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}\,dx+\frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}\,dy=0.$$

После разделения переменных, когда каждый член уравнения будет зависеть только от одной переменной, общий интеграл уравнения находится почленным интегрированием:

$$\int\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}\,dx+\int\frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}\,dy=C.\ *$$

1066. Найти общие интегралы следующих уравнений:

1) $(x+1)^3\,dy-(y-2)^2\,dx=0$. 2) $\sec^2 x\sec y\,dx=-\operatorname{ctg} x\sin y\,dy$.

3) $(\sqrt{xy}+\sqrt{x})\,y'-y=0$. 4) $2^{x+y}+3^{x-2y}\,y'=0$.

Решение. 1) Разделим переменные в данном уравнении, деля обе его части на $(x+1)^3(y-2)^2$:

$$\frac{dy}{(y-2)^2}-\frac{dx}{(x+1)^3}=0.$$

Почленно интегрируя, получим искомый общий интеграл:

$$\int(y-2)^{-2}\,d(y-2)-\int(x+1)^{-3}\,d(x+1)=C;$$

$$-\frac{1}{y-2}+\frac{1}{2(x+1)^2}=C.$$

2) Для разделения переменных делим все члены уравнения на $\sec y\operatorname{ctg} x$:

$$\sec^2 x\operatorname{tg} x\,dx+\sin y\cos y\,dy=0.$$

Интегрируя, получим

$$\int\operatorname{tg} x\,d\operatorname{tg} x+\int\sin y\,d\sin y=c;\quad \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\frac{1}{2}\sin^2 y=\frac{1}{2}C;$$

$$\operatorname{tg}^2 x+\sin^2 y=C.$$

* Если $\varphi_1(x_1)=0$ (или $f_2(y_1)=0$), то $x=x_1$ $(y=y_1)$ также будет интегралом уравнения $(*)$, который может быть потерян при разделении переменных. В дальнейшем исследование таких интегралов опускается.