1062. $y=C_1x+C_2x^2$; $x^2y''-2xy'+2y=0$.

1063. $x^2+2xy=C$; $(x+y)\,dx+x\,dy=0$.

1064. $s=t^2\ln t+C_1t^2+C_2t+C_3$; $t\frac{d^3s}{dt^3}=2$.

1065*. $y-x+C_1\ln y=C_2$; $yy''-(y')^2+(y')^3=0$.

§ 2. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение первого порядка $P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=0$ называется уравнением с разделяющимися переменными, если функции P и Q разлагаются на множители, зависящие каждый только от одной переменной:

$$f_1(x)f_2(y)\,dx+\varphi_1(x)\varphi_2(y)\,dy=0. \qquad (*)$$

В таком уравнении путем деления его членов на $f_2(y)\cdot\varphi_1(x)$ переменные разделяются:

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx+\frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy=0.$$

После разделения переменных, когда каждый член уравнения будет зависеть только от одной переменной, общий интеграл уравнения находится почленным интегрированием:

$$\int\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx+\int\frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy=C.\ *$$

1066. Найти общие интегралы следующих уравнений:

1) $(x+1)^3\,dy-(y-2)^2\,dx=0$. 2) $\sec^2 x\sec y\,dx=-\operatorname{ctg} x\sin y\,dy$.

3) $(\sqrt{xy}+\sqrt{x})\,y'-y=0$. 4) $2^{x+y}+3^{x-2y}\,y'=0$.

Решение. 1) Разделим переменные в данном уравнении, деля обе его части на $(x+1)^3(y-2)^2$:

$$\frac{dy}{(y-2)^2}-\frac{dx}{(x+1)^3}=0.$$

Почленно интегрируя, получим искомый общий интеграл:

$$\int(y-2)^{-2}\,d(y-2)-\int(x+1)^{-3}\,d(x+1)=C;$$

$$-\frac{1}{y-2}+\frac{1}{2(x+1)^2}=C.$$

2) Для разделения переменных делим все члены уравнения на $\sec y\operatorname{ctg} x$:

$$\sec^2 x\operatorname{tg} x\,dx+\sin y\cos y\,dy=0.$$

Интегрируя, получим

$$\int\operatorname{tg} x\,d\operatorname{tg} x+\int\sin y\,d\sin y=c;\quad \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\frac{1}{2}\sin^2 y=\frac{1}{2}C;$$

$$\operatorname{tg}^2 x+\sin^2 y=C.$$

* Если $\varphi_1(x_1)=0$ (или $f_2(y_1)=0$), то $x=x_1$ ($y=y_1$) также будет интегралом уравнения (*), который может быть потерян при разделении переменных. В дальнейшем исследование таких интегралов опускается.

3) Выразим производную через дифференциалы переменных: $y' = \frac{dy}{dx}$, умножим обе части уравнения на dx и разложим коэффициент при dy на множители:

$$(\sqrt{y}+1)\sqrt{x}\ \ dy - y\,dx = 0.$$

Далее разделяем переменные:

$$\frac{\sqrt{y}+1}{y}\,dy - \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 0$$

и, интегрируя, находим общий интеграл

$$\int\left(y^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{y}\right)dy - \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = C;\ \ 2\sqrt{y}+\ln|y|-2\sqrt{x} = C.$$

4) Умножим обе части уравнения на dx и разложим коэффициенты при dx и dy на множители:

$$2^x 2^y\,dx + 3^x 3^{-2y}\,dy = 0.$$

Разделяем переменные, умножая на $2^{-y}\,3^{-x}$:

$$2^x 3^{-x}\,dx + 3^{-2y}\,2^{-y}\,dy = 0,$$

и интегрируем:

$$\int\left(\frac{2}{3}\right)^x dx + \int 18^{-y}\,dy = C;\qquad \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln\frac{2}{3}} - \frac{18^{-y}}{\ln 18} = C.$$

1067. Найти частный интеграл уравнения, удовлетворяющий указанному начальному условию:

1) $y\,dx + \operatorname{ctg} x\,dy = 0;\qquad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1.$

2) $s = s'\cos^2 t\,\ln s;\ \ s(\pi) = 1.$

Решение. 1) Разделяя переменные и интегрируя, находим сначала общий интеграл данного уравнения:

$$\operatorname{tg} x\,dx + \frac{dy}{y} = 0;\qquad -\ln|\cos x| + \ln|y| = \ln C;$$

$$|y| = C|\cos x|;\qquad y = \pm C\cos x = C_1\cos x.$$

Затем, используя указанное начальное условие $y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$, подставляем в общий интеграл заданные значения переменных $\left(x = \frac{\pi}{3},\ y = -1\right)$ и определяем соответствующее значение произвольной постоянной: $-1 = C_1\cos\frac{\pi}{3};\ C_1 = -2.$

При этом значении C_1 из общего интеграла получаем искомый частный интеграл, удовлетворяющий заданному начальному условию, $y=-2\cos x$.

2) Умножая на $\frac{\sec^2 t}{s}dt$, разделяем переменные $\sec^2 t\,dt = \frac{\ln s}{s}ds$ и, интегрируя, находим общий интеграл

$$\int d(\operatorname{tg} t)=\int \ln s\, d\ln s + C; \quad \operatorname{tg} t=\frac{1}{2}\ln^2 s + C.$$

Подставляя начальные значения $t=\pi$, $s=1$, определяем значение C:

$$\operatorname{tg}\pi=\frac{1}{2}\ln 1 + C; \quad C=0.$$

Следовательно, искомый частный интеграл $\ln^2 s - 2\operatorname{tg} t=0$.

Решить следующие дифференциальные уравнения (найти их общие интегралы):

1068. $(y+xy)\,dx+(x-xy)\,dy=0$. **1069.** $yy'+x=1$.

1070. $\sin\alpha\cos\beta\, d\alpha=\cos\alpha\sin\beta\, d\beta$. **1071.** $1+(1+y')e^y=0$.

1072. $3e^x\sin y\,dx=(e^x-1)\sec y\,dy$. **1073*.** $x^2(2yy'-1)=1$.

Найти частные интегралы следующих уравнений при указанных начальных условиях:

1074. $y^2+x^2y'=0$; $y(-1)=1$. **1075.** $2(1+e^x)yy'=e^x$; $y(0)=0$. **1076.** $(1+x^2)y^3\,dx-(y^2-1)x^3\,dy=0$; $y(1)=-1$.

§ 3. Однородные уравнения первого порядка

Уравнение первого порядка $y'=f(x, y)$ называется однородным, если $f(x, y)$ можно представить как функцию только одного отношения переменных $f(x, y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, т. е. уравнение вида $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными, а следовательно, и решается посредством замены функции y (или x) новой функцией u по формуле $y=ux$ (или $x=uy$).

1077. Проинтегрировать следующие уравнения:

1) $(x^2+y^2)\,dx-2xy\,dy=0$; 2) $y-xy'=y\ln\frac{x}{y}$;

3) $x\,dy-y\,dx=y\,dy$ при условии $y(-1)=1$.